UNIVERSIDAD POLITECNICA DE MADRID

CALCULO VECTORIAL.

URBANO VIÑUELA CONEJO.
OCTAVIO PUCHE RIART.

C A L C U L O   V E C T O R I A L

URBANO VIÑUELA
OCTAVIO PUCHE

ISBN 84-600-4056-9

Deposito Legal CR 1.586 - 1.985

Edita y Distribuye: Dpto. Publicaciones de la Escuela Universitaria Politécnica de Almadén.

1. MAGNITUDES ESCALARES Y VECTORIALES.-

Magnitudes escalares son las que están suficientemente caracterizadas por un número. Ejemplos: masa, temperatura - densidad, tiempo, volumen, trabajo, potencia,....

Magnitudes vectoriales son las que se caracterizan -- por los siguientes elementos:

1.- Un módulo. Que es un número real positivo que las -- cuantifica.
2.- Una dirección. Que es la de una recta (y la de todas/ sus paralelas).
3.- Un sentido. Sobre la dirección.
4.- Y a veces, un punto de aplicación (o una recta soporte

Ejemplos: peso, velocidad, aceleración, fuerza, momento estático, intensidad de campo eléctrico, desplazamiento,....

2. CLASIFICACION DE LOS VECTORES ATENDIENDO A SU PUNTO D DE APLICACION.-

Se distinguen los siguientes tipos:

1.- Vectores libres.- Se caracterizan por un módulo, una/ dirección y un sentido (3 condiciones). Su punto de aplicación/ es arbitrario.

2.- Vector deslizante .- Su punto de aplicación puede ser uno cualquiera de la recta que lo soporta. Estos vectores se - caracterizan por módulo, dirección y sentido, asi como tres -- coordenadas (x,y,z) de un punto cualquiera de la recta soporte/ (6 condiciones).

3.- Vector fijo.- (o localizado o ligado). El punto de - aplicación es fijo. Se caracteriza por módulo, dirección, sentido y coordenadas (x,y,z) de su punto de aplicación (6 condiciones).

Ejemplos de vectores localizados: El campo de velocidades ligado a los puntos de un sólido en movimiento. Los vectores intensidad de campo ligados a la carga unidad en presencia/ de otra carga.

Ejemplos de vectores deslizantes: Las velocidades angulares a lo largo del eje de rotación, las fuerzas aplicadas - sobre un sólido rígido.

Ejemplos de vector libre: Momento de un par de fuerzas (como luego demostraremos).

3. VECTORES IGUALES, EQUIPOLENTES Y OPUESTOS.-

Vectores iguales son los que en ellos coinciden todos los elementos que los caracterizan.

Dos vectores libres serán iguales cuando tengan igual módulo, dirección y sentido.

Dos vectores deslizantes serán iguales cuando tengan/ igual módulo, dirección, sentido y las rectas soportes que los/ contienen sean coincidentes.

Dos vectores localizados serán iguales cuando tengan/ igual módulo, dirección, sentido y punto de aplicación.

Vectores equipolentes son los que su módulo, dirección y sentido son coincidentes, diferiendo solo en su punto de aplicación.

En los vectores libres no tiene sentido el definir la la equipolencia al ser el punto de aplicación arbitrario.

Dos vectores deslizantes serán equipolentes cuando -

coincidan en módulo, dirección y sentido, por lo que sus rectas soportes permanecerán paralelas.

Dos vectores localizados serán equipolentes siempre que coincidan en módulo, dirección y sentido.

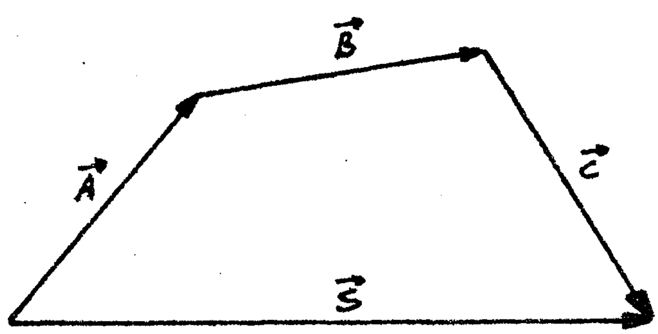
Vectores <u>opuestos</u>, son los que coinciden en módulo y dirección pero el sentido es el contrario.

4. <u>VECTORES LIBRES</u>.-

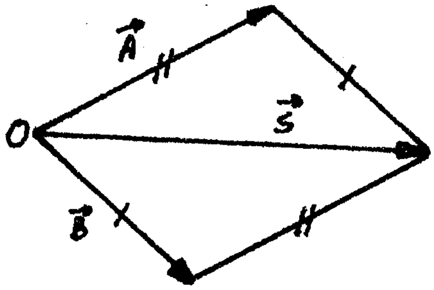
4.1. <u>Operaciones con vectores libres: a) Suma.</u>

Se define la suma de los vectores libres $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}, \ldots \overline{N}$. cualesquiera, a otro vector $\overline{S}$ que resulta de trasladar el origen de $\overline{B}$ al extremo de $\overline{A}$, el origen de $\overline{C}$ al extremo de $\overline{B}$ y así sucesivamente hasta $\overline{N}$. El vector suma $\overline{S}$ tiene por origen el de $\overline{A}$ y por extremo el de $\overline{N}$. Este vector $\overline{S}$ será también un vector libre

Ejemplo: Suma en el caso de 3 vectores

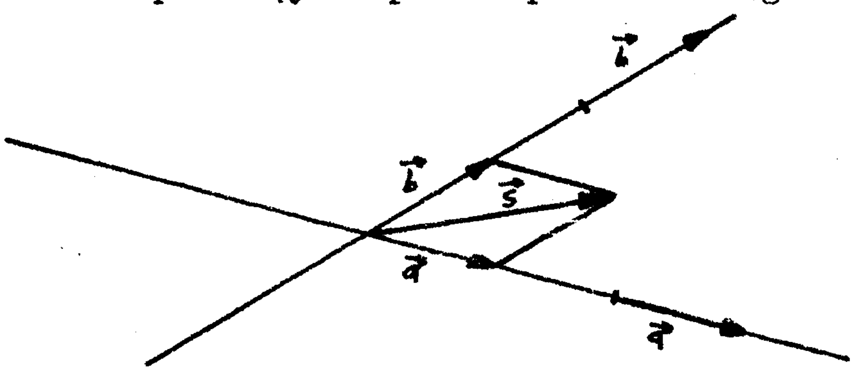


Si tenemos 2 vectores $\overline{A}$ y $\overline{B}$ y los queremos sumar, llevaremos el origen de $\overline{B}$ al extremo de $\overline{A}$, obteniendo el vector suma $\overline{S}$ que irá desde el origen de $\overline{A}$ al extrema de $\overline{B}$, si trazamos por el origen de $\overline{A}$ una paralela a $\overline{B}$ y por el extremo de $\overline{B}$ una paralela a $\overline{A}$, se nos constituye un paralelogramo de lados $\overline{A}$ y $\overline{B}$ cuya diagonal es el vector $\overline{S}$, suma de $\overline{A}$ y $\overline{B}$



De lo anterior se deduce que para obtener la suma de dos/ vectores $\overline{A}$ y $\overline{B}$, puedo ejem - plar lo que definimos como - REGLA DEL PARALELOGRAMO, que consiste en llevar los dos - vectores a un origen común O construir su paralelogramo y la diagonal de este, por el punto O, nos dará el vector libre - suma $\overline{S}$.

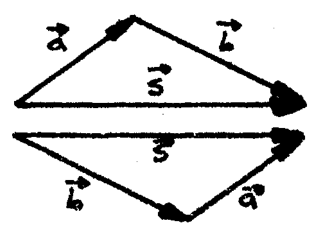
En el caso de vectores deslizantes se observa que la/ única posibilidad de sumarlos, es cuando sus rectas soportes se cortan en un punto (y se puede aplicar la regla del paralelogra mo)



Los vectores localizados solo pueden sumarse cuando - sus puntos de aplicación son coincidentes.

<u>Propiedades de la suma.</u>

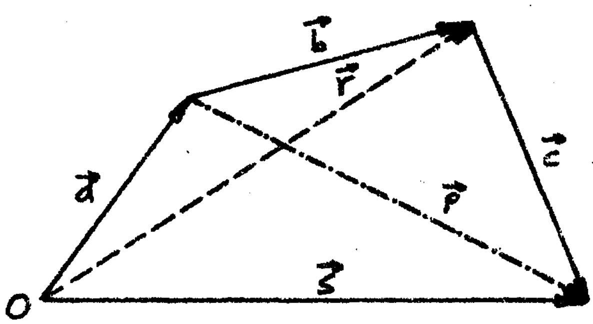
a) Conmutativa.- $\overline{a} + \overline{b} = \overline{b} + \overline{a}$
Se demuestra gráficamente =
Es indiferente el lado del paralelogramo que emplee - mos porque la diagonal se- guirá siendo la misma.



b) Asociativa.- $(\overline{a} + \overline{b}) + \overline{c} = \overline{a} + (\overline{b} + \overline{c})$

$\overline{a} + \overline{b} = \overline{r}$ $\quad$ $\overline{r} + \overline{c} = \overline{s}$ $\quad$ c.q.d.

$\overline{b} + \overline{c} = \overline{p}$ $\quad$ $\overline{a} + \overline{p} = \overline{s}$

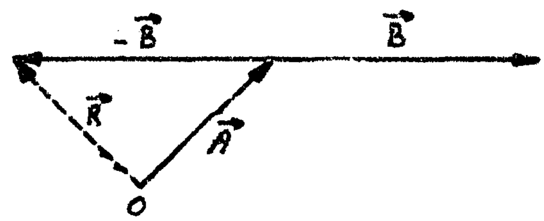


b) <u>Resta</u>

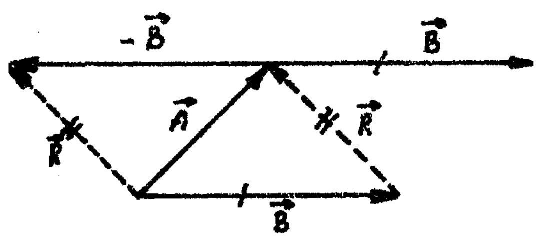
La resta de dos vectores libres $\overline{A}$ y $\overline{B}$ es otro vector/ $\overline{R}$ libre resultante de sumar el vector $\overline{A}$ y el opuesto al vector/ $\overline{B}$.

$$\overline{R} = \overline{A} - \overline{B} = \overline{A} + (-\overline{B})$$

LLevamos el origen de $(-\overline{B})$ al extremo de $\overline{A}$ y obtene - mos $\overline{R}$



Trazando paralelas a $\overline{B}$ y $\overline{R}$ obtenemos un paralelograma en el que se aprecia que $\overline{R} = \overline{A} - \overline{B}$ es un vector que tiene su -- origen en el extremo de $\overline{B}$ y su extremo en el extremo de $\overline{A}$.

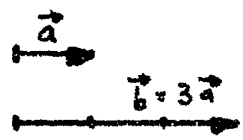


Las propiedades de la resta son las mismas que las de/ la suma, al ser esta una suma.

c) <u>Producto de un escalar por un vector</u>

El producto de unescalar n por un vector $\bar{a}$ es otro v vector $\bar{b}$ de módulo n veces el de $\bar{a}$, dirección la de $\bar{a}$ (ya que/ sumamos n vectores de la msima dirección) y sentido coincidente con el de $\bar{a}$ si $n > o$ y opuesto si $n < o$.

Ej.: Vamos a ver gráficamente el caso en que n = 3

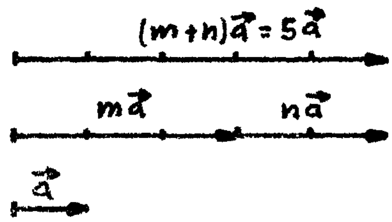


Propiedades.

a) Distributiva respecto a la suma de escalares

$$(m + n)\ \bar{a} = \overline{ma} + \overline{na}$$

Ej.: Si n = 2
y m = 3

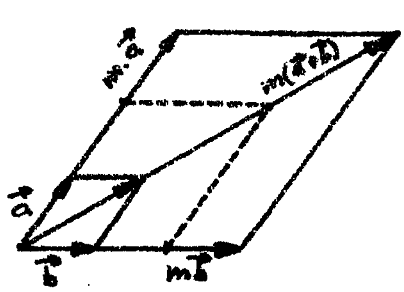


El vector $(m + n)\ \bar{a}$ coinciden con el vector resultante de la suma de $\overline{ma}$ y $\overline{na}$

b) Distributivas respecto a la suma de vectores.

$$m\ (\ \bar{a} + \bar{b}\ ) = \overline{ma} + \overline{mb}$$

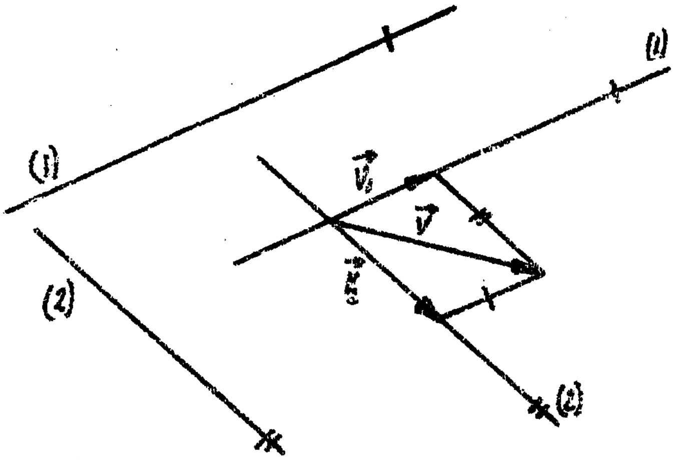
Ej.: m = 3



Si los lados mantienen la proporcionalidad, la diagonal -- tambien la mantiene/ (Según el Teorema de Thales).

4.2. Descomposición de un vector según dos direcciones.-

Si tenemos un vector $\bar{v}$ dado y dos direcciones (1) y/ (2) cualesquiera, coplanarias con $\bar{v}$, siempre podremos con las/ mismas, construir los lados de un paralelogramo, que representan dos vectores $\bar{v}_1$ y $\bar{v}_2$ que sumados nos darán el vector dado.



Siendo la descomposición única según estas dos direccióne (Según la regla del paralelogramo aplicada a la inversa)

4.3. Vector unitario.

Se llama vector unitario a todo vector de módulo unidad.

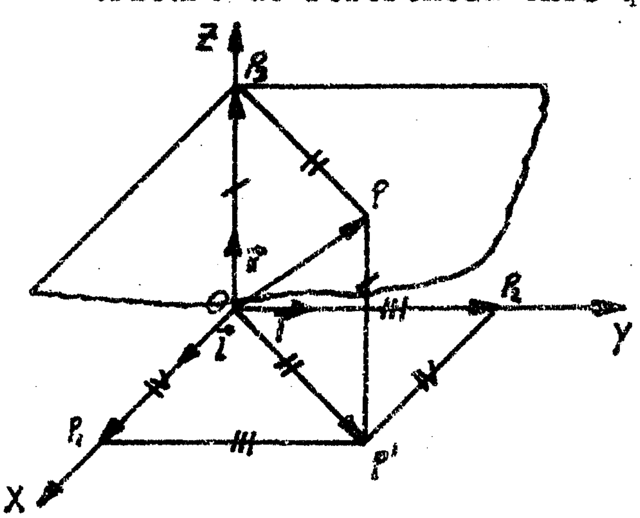
El vector unitario $\overset{1}{u}$ según la dirección del vector $\overline{a}$, lo obtendremos de la siguiente ecuación $\underline{\overline{a} = |a|\ \overline{u}}$ (I)

La ecuación (I) es una igualdad vectorial porque en ambos vectores, el módulo es a, la dirección es la de $\overline{a}$, ya que la de $\overline{u}$ es la de $\overline{a}$ por definición, e igual sentido al ser el módulo de a (como cualquier módulo) un número real positivo

(I) $\overline{u} = \dfrac{\overline{a}}{|\overline{a}|}$ vector unitario según la dirección de $\overline{a}$

4.4. Representación de un vector.-

Para las representaciones espaciales emplearemos un triedro de referencia OXYZ que suele ser ortogonal y cuyos vectores unitarios vamos a definir como $\overline{i}$, $\overline{j}$ y $\overline{k}$ (en el caso ortogonal). Si tenemos tambien un vector $\overline{OP}$ y trazamos por P una paralela a OZ, obtenemos en su intersección con el plano XOY el punto P', el vector $\overline{OP'}$ es la proyectcion de $\overline{OP}$ sobre el plano



XOY. La paralela por P a $\overline{OP'}$ nos determina $\overline{OP_3}$.

$\overline{OP_3}$ y $\overline{OP'}$ constituyen los lados de un paralelogramo, luego de por aplicación de la regla del paralelogramo

$$\overline{OP} = \overline{OP'} + \overline{OP_3} \quad (I)$$

A su vez trazando paralelas por p'a OX y OY obtenemos otro paralelogramo donde $= \overline{OP'} = \overline{OP_1} + \overline{OP_2}$, luego (I) se convierte en $\overline{OP} = \overline{OP_1} + \overline{OP_2} + \overline{OP_3}$. Hemos descompuesto mediante 2 aplicaciones sucesivas de la regla del parelelogramo el vector $\overline{OP}$/ en tres vectors según las direcciones de los ejes de referencia ($\overline{i}$, $\overline{j}$, $\overline{k}$)

$$\overline{OP} = \overline{OP_1}\ \overline{i} + \overline{OP_2}\ \overline{j} + \overline{OP_3}\ \overline{k}$$

A este mismo resultado podriamos haber llegado: trazando por P un plano paralelo a XOY, su intersección con OZ nos determinaria el punto P_3, el vector $\overline{OP_3}$ es la proyección de $\overline{OP}$ sobre OZ; trazando por P un plano paralelo a YOZ, obteniendo - $\overline{OP_1}$, proyección de $\overline{OP}$ sobre el eje de OX, y otro paralelo a - XOZ, que nos da $\overline{OP_2}$.

$$\overline{OP} = \overline{OP_1} + \overline{OP_2} + \overline{OP_3} = OP_1\ \overline{i} + OP_2\ \overline{j} + OP_3\ \overline{k}$$

OP_1, OP_2, OP_3, valores modulares de las proyecciones del vector sobre los ejes cartesianos reciben el nombre de <u>componentes</u> - del vector.

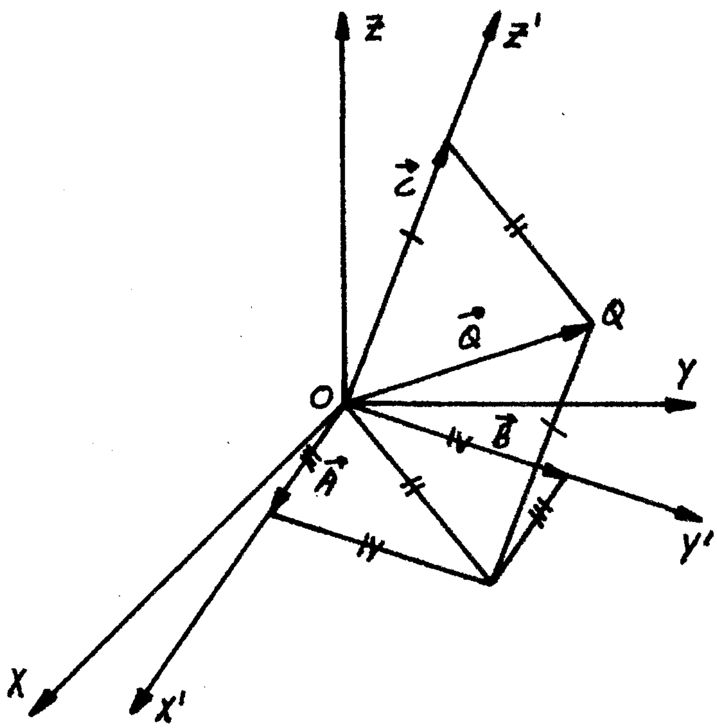
Modularmente $= |\overline{OP}|^2 = |\overline{OP'}|^2 + |P'P|^2 = |\overline{OP_1}|^2 + |\overline{OP_2}|^2 + |\overline{OP_3}|^2 = =$

$$|\overline{OP}| = \sqrt{|\overline{OP_1}|^2 + |\overline{OP_2}|^2 + |\overline{OP_3}|^2}$$

Dos <u>vectores</u> $\overline{A} = A_1\ \overline{i} + A_2\ \overline{j} + A_3\ \overline{k}$, $\overline{B} = B_1\ \overline{i} + B_2\ \overline{j} + B_3\ \overline{k}$ son <u>iguales</u>, si sus componentes soinciden verificandose que:

$$A_1 = B_1$$
$$A_2 = B_2 \qquad \text{o lo que es lo mismo} \quad A_i = B_i$$
$$A_3 = B_3$$

4.5. <u>La descomposición de un vector según tres direcciones cualesquiera es única.</u>-



Supongamos el vector $\overline{OQ} = \overline{Q}$ conocido, tendrá unas componentes $\overline{Q} = Q_1\,\overline{i} + Q_2\,\overline{j} + Q_3\,\overline{k}$ - proyecciones de $\overline{Q}$ sobre los - ejes cartesianos OX, OY, OZ. Si mediante proyecciones so - bre las direcciones cualesquiera OX', OY', OZ' obtenemos que -

$$\overline{Q} = \overline{A} + \overline{B} + \overline{C}$$

El vector $\overline{Q}$ lo podemos descomponer como suma de 3 vectores según estas direcciones, de - unitarios respectivos $\overline{a}$, $\overline{b}$, y $\overline{c}$

$$\overline{Q} = \overline{A}_a + \overline{B}_b + \overline{C}_c$$

Estos unitarios tendrán unas componentes según los - ejes cartesianos.

$$\overline{a} = a_1\,\overline{i} + a_2\,\overline{j} + a_3\,\overline{k} \quad ; \quad \overline{b} = b_1\,\overline{i} + b_2\,\overline{j} + b_3\,\overline{j} + b_3\,\overline{k} \quad ;$$

$$\overline{c} = c_1\,\overline{i} + c_2\,\overline{j} + c_3\,\overline{k}$$

luego $\overrightarrow{Q} = A\,(a_1\,\overline{i} + a_2\,\overline{j} + a_3\,\overline{k}) + B\,(b_1\,\overline{i} + b_2\,\overline{j} + b_3\,\overline{k}) +$

$$+ C\,(c_1\,\overline{i} + c_2\,\overline{j} + c_3\,\overline{k}) = (A_{a_1} + B_{b_1} + C_{c_1})\,\overline{i} +$$

$$(A_{a_2} + B_{b_2} + C_{c_2})\,\overline{j} + (A_{a_3} + B_{b_3} + C_{c_3})\,\overline{k} =$$

$$= Q_1\,\overline{i} + Q_2\,\overline{j} + Q_3\overline{k} \qquad \text{(II)}$$

Para que se verifique la igualdad vectorial (II), tendrá que verificarse la igualdad de las componentes

$$Q_1 = A_{a_1} + B_{b_1} + C_{c1}$$

$$Q_2 = A_{a_2} + B_{b_2} + C_{c_2}$$

$$Q_3 = A_{a_3} + B_{b_3} + C_{c_3}$$

Tenemos un sistema de 3 ecuaciones, con tres ingognitas A,B,C, sistema compatible y determinado que nos da un solución única.

PROBLEMAS

1.- Sumar y restar los vectores $\vec{a} = 3\vec{i} + \vec{j}$ y $\vec{b} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$

Para sumar vectores, sumamos sus componentes $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$

$\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$. Luego $\vec{s} = s_1\vec{i} + s_2\vec{j} = (a_1 + b_1)\vec{i} + (a_2 + b_2)\vec{j} + (a_3 + b_3)\vec{k}$

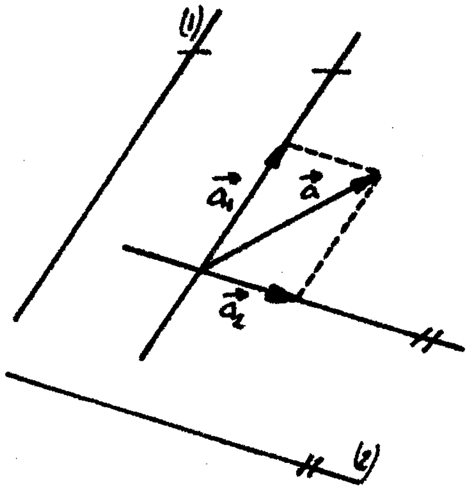
Luego S = a + b = 5 i + k

Igual para la resta $\vec{r} = \vec{a} + (-\vec{b}) = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$

2.- Descomponer el vector $\vec{a} = 4\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$ según las direcciones siguientes:

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-1} \qquad (1)$$

$$\frac{x}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z}{-1} \qquad (2)$$



Estas direcciones tendrán que ser coplanarias con el vector $\bar{a}$ para poder aplicar la regla del paralelogramo

$\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 = 4\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$

$\vec{a}_1 = \lambda\,(2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k})$

$\vec{a}_2 = \mu\,(3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k})$

$4\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k} = \lambda(2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}) + \mu(3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}) = (2\lambda + 3\mu)\vec{i} + (\lambda + 2\mu)\,\vec{j} + (-\lambda - \mu)\,\vec{k}$. Y para que se verifique la igualdad vectorial se tendrán que igualar los componentes, luego:

$$\begin{aligned} 4 &= 2\lambda + 3\mu \\ 3 &= \lambda + 2\mu \\ -1 &= -\lambda - \mu \end{aligned} \qquad \text{Resolviendo el sistema} \qquad \begin{aligned} 2 &= \mu \\ \\ \lambda &= -1 \end{aligned}$$

luego $\quad \vec{a}_1 = -2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$

$\qquad\quad \vec{a}_2 = 6\vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k}$

Comprobación $\quad \vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 = 4\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$

3.- Dado el vector $\vec{a} = 3\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ / $^*|\vec{a}| = \sqrt{9 + 1 + 1} =$

$\vec{u} = \vec{a}/|\vec{a}| = (3/\sqrt{11}).\ \vec{i} + (1/\sqrt{11})\vec{j} + (1/\sqrt{11})\vec{k}$

Comprobación $\quad |\vec{u}| = 1 = \sqrt{3^2/(\sqrt{11})^2 + 1^2/(\sqrt{11})^2 + 1^2/(\sqrt{11})^2} =$

$= \sqrt{11/11} = 1$

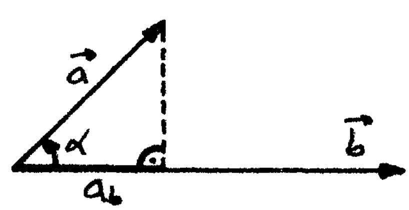
4.6. Producto escalar de 2 vectores.-

El producto escalar de 2 vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$, cuyas lineas de acción forman un ángulo α, es un escalar cuyo valor viene/ por la expresión:

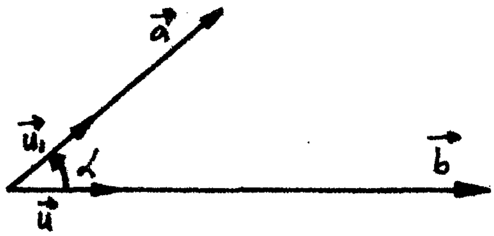
$$\vec{a}\ .\ \vec{b} = |\vec{a}|\ .|\vec{b}|\ \cos\alpha$$

$a \cos\alpha = a_b$ (proyección de a sobre b)

$b \cos(-\alpha) = B_a$ (proyección de b sobre a)



Su significado físico es el de la proyección de un/ vector sobre el otro por el módulo de éste último.



Si $\vec{u}$ es unitario según la dirección de $\vec{b}$ y $\vec{u}_1$, según la de $\vec{a}$.

$\vec{a} \cdot \vec{u} = |\vec{a}|\,|\vec{u}| \cos\alpha = a \cos = a_b$

$\vec{b} \cdot \vec{u}_1 = |\vec{b}|\,|\vec{u}_1| \cos(-\alpha) = b. \cos(-\alpha) = b_a$

Con el producto escalar de un vector por el unitario según una dirección obtenemos la <u>proyección</u> del vector sobre - dicha diredción.

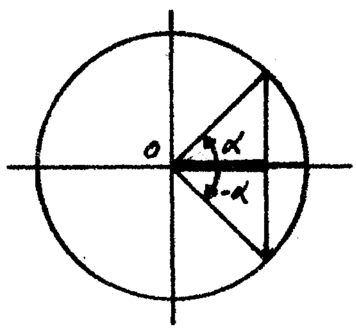
El <u>producto escalar es nulo</u>: 1) Cuando $\vec{a}$ ó $\vec{b}$ lo son. 2) cuando $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son perpendiculares $\Rightarrow \cos(90º) = 0$

<u>Propiedades</u> del producto escalar

a) Propiedad conmutativa: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$

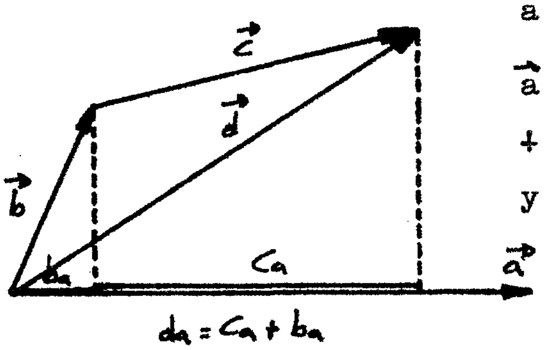
Demostración $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\alpha = |\vec{b}|\,|\vec{a}| \cos(-\alpha)$

ya que cos = cos (-)



b) Propiedad distributiva

$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$



$\vec{a} \cdot (\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{d} = a.d_a$

$\vec{a}.\vec{b} + \vec{a}.\vec{c} = a.b_a + \cancel{a.b_a} +$
$+ a.c_a = a\,(b_a + c_a)$

$y \Rightarrow d_a = (b_a + c_a)$

Expresión analítica del producto escalar

$\vec{a}.\vec{b} = (a_1\,\vec{i} + a_2\,\vec{j} + a_3\,\vec{k}).(b_1\,\vec{i} + b_2\,\vec{j} + b_3\,\vec{k}) = a_1 b_1\,\vec{i}.\vec{i} +$
$+ a_1\,b_2\,\vec{i}.\vec{j} + a_1\,b_3\,\vec{i}\,.\vec{k} + a_2\,b_1\,\vec{j}.\vec{i} + a_2\,b_2\,\vec{j}.\vec{j} + a_2\,b_3\,\vec{j}.\vec{k} +$
$+ a_3\,b_1\,\vec{k}.\vec{i} + a_3\,b_2\,\vec{k}.\vec{j} + a_3\,b_3\,.\vec{k}.\vec{k}$

pero como $\vec{i}.\vec{i} = \vec{j}.\vec{j} = \vec{k}.\vec{k} = |\vec{i}||\vec{i}|\,.\cos(0º) = 1$
$\vec{i}.\vec{j} = \vec{j}.\vec{k} = \vec{k}.\vec{i} = \vec{j}.\vec{i} = \vec{k}.\vec{j} = \vec{i}.\vec{k} = |\vec{i}||\vec{j}|.\cos(90º)$
$= 0$

luego $\underline{\vec{a}.\vec{b} = a_1\,b_1 + a_2\,b_2 + a_3\,b_3}$

Ejemplos de aplicación del producto escalar: El trabajo $W = \vec{F}\,.\,\vec{d}_r$. El flujo eléctrico a través de una superficie $\phi = \vec{E}.\vec{d}_s$. Etc.

PROBLEMAS

4.- Hallar el producto escalar de los vectores $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ y $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j}$, indicando su posición relativa

- Aplicando la expresión analitica del producto escalar

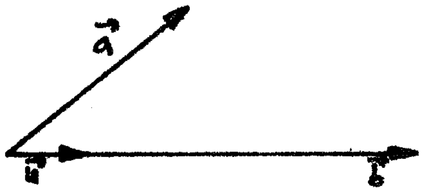
$\vec{a}.\vec{b} = 2.1 + (-1).2 + 1.0 = 0 \Rightarrow$
$\cos\alpha = \vec{a}.\vec{b}/\,|\vec{a}|.|\vec{b}| = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \alpha = 90º$

Son perpendiculares porque su producto escalar es cero

5.- Hallar la proyección de $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$ sobre la recta definida por el vector $\vec{b} = 2\vec{i} + \vec{j}$

- Método I. El producto escalar nos da la proyección
$\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|\cos\alpha = a_b\,.\,|\vec{b}|$
luego $a_b = \vec{a}\,.\,\vec{b}/\,|\vec{b}| =$
$= (2.2 - 3.1 - 1.0)/\,\sqrt{2^2 + 1^2} = 1/\sqrt{5}$

- Método II. La proyección de un vector sobre una di rección dada, se obtiene multiplicando escalarmente el vector/ dado por el unitario según dicha dirección $\vec{a}.\vec{u} = |\vec{a}|.|\vec{u}| \cos\alpha =$



$= |\vec{a}| \cdot \cos\alpha = a_b$

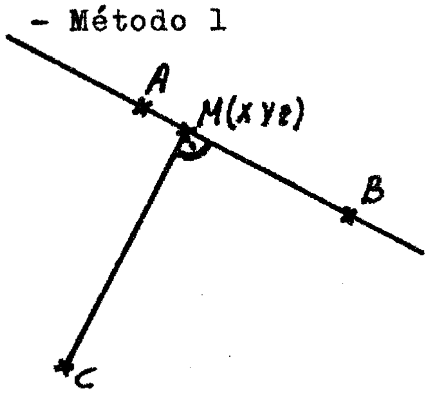
$\vec{u} = \vec{b}/ |\vec{b}| = (2\vec{i} + \vec{j})/ \sqrt{(2)^2+(1)^2} =$

$= (2/\sqrt{5})\,\vec{i} + (1/\sqrt{5})\,\vec{j}$

$a_b = \vec{a}.\vec{u} = 2.2 / \sqrt{5} + (-3).1/\sqrt{5} + 1.0 = 4/\sqrt{5} - 3/\sqrt{5} =$
$= 1/\sqrt{5}$

6.- Hallar el pie de la perpendicular trazada por C (111) a la recta $\overrightarrow{AB}$ definida por los puntos A(101) y B(2,1,1)

- Método 1



Tenemos tres incógnitas - (x,y,z), coordenadas de - M, por lo que necesitamos tres ecuaciones:

- una, la ecuación de - perpendicularidad de $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CM}$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CM} = 0$ (1)

- Las otras dos, las de - los planos cuya intersección es la recta $\overrightarrow{AB}$, siendo M (x,y,z), un punto genérico de dicha recta.

$x-x_1/x_2 - x_1 = y - y_1/y_1-y_2-y_1 = z-z_1/z_2 - z_1$ (2) y (3)

(1) $\overrightarrow{AB} = \vec{B} - \vec{A} = (2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}) - (\vec{i} + \vec{k}) = \vec{i} + \vec{j}$

$\overrightarrow{CM} = \vec{M} - \vec{C} = (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) - (\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}) = (x-1)\vec{i} +$
$+ (y-1)\vec{j} + (z-1)\vec{k}$

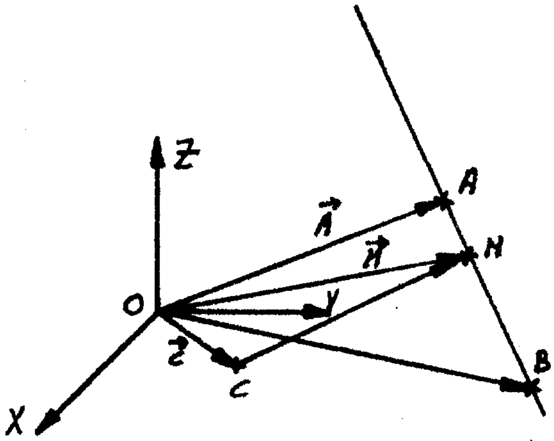
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CM} = 0 \Longrightarrow 1(x-1) + 1(y-1) = 0 \Longrightarrow x + y = 2$

(2) y(3) $\Rightarrow (x-1)/(2-1) = y/1 = (z-1)/0 \Longrightarrow \begin{cases} z = 1 \\ x - y = 1 \end{cases}$

$x = 3/2 \quad y = 1/2 \quad z = 1 \Longrightarrow$ luego M (3/2, 1/2,1)

- Método II

El producto escalar de dos vectores perpendiculares/ es 0.



$\vec{AB} . \vec{CM} = 0$

$\vec{AB} = \vec{B} - \vec{A} = \vec{i} + \vec{j}$

$\vec{CM} = \vec{M} - \vec{C}$

$\vec{M} = \vec{A} + \vec{AM} = \vec{A} + \lambda \vec{AB}$

ya que $\vec{AM}$ es un vector según/ la dirección de $\vec{AB}$, luego es/ proporcional a este ==>

$\Longrightarrow \vec{M} = (\vec{i} + \vec{k}) + \lambda(\vec{i} + \vec{j}) =$

$\vec{CM} = \lambda\vec{i} + (\lambda - 1)\vec{j}$

Con el desarrollo del producto escalar obtenemos una ecuación lineal en λ

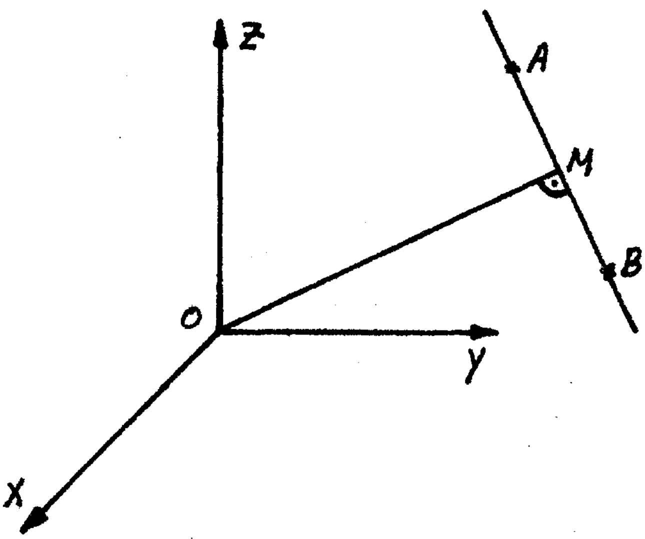
$\vec{AB} . \vec{CM} = 0 = 1.\lambda + 1(\lambda - 1) = 0 \Longrightarrow 2\lambda - 1 = 0 \Longrightarrow \lambda = 1/2$

entrando con este valor en $\vec{M} \Longrightarrow \vec{M} = \vec{i} + \vec{k} + (1/2).(\vec{i} + \vec{j}) =$

$= (3/2)\vec{i} + (1/2)\vec{j} + \vec{k}$

M (3/2, 1/2, 1)

7.- Hallar el pie de la perpendicular por el origen a la recta $\vec{AB}$ dada por los puntos A (101) y B (211)



Tenemos tres incognitas (x,y,z) coordenadas de M, necesitamos pues tres ecuaciones para resolver el sistema

$\vec{OM} . \vec{AB} = 0$ (I)

$(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) . (\vec{i} + \vec{j}) = 0 \Longrightarrow$

$\Longrightarrow x + y = 0$ (I)

$(x-1)/(2-1) = (y-0)/(1-0) =$

$= (z-1)/(1-1)$

$$\Longrightarrow \begin{cases} z = 1 & \text{(II)} \\ x - 1 = y & \text{(III)} \end{cases}$$

$2x = 1 \Longrightarrow x = 1/2 \quad y = -1/2$

M (1/2, -1/2, 1)

4.7. Producto vectorial-Definición.-

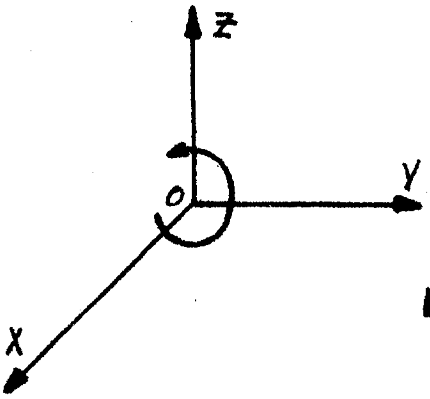
El producto vectorial de dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ es otro -

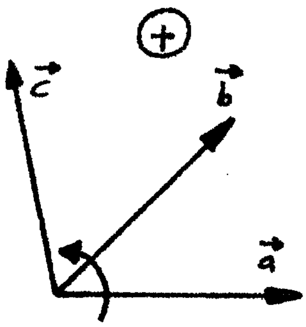
vector $\vec{c}$ definido por los siguientes elementos:

1.- Módulo $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \operatorname{sen} \alpha$

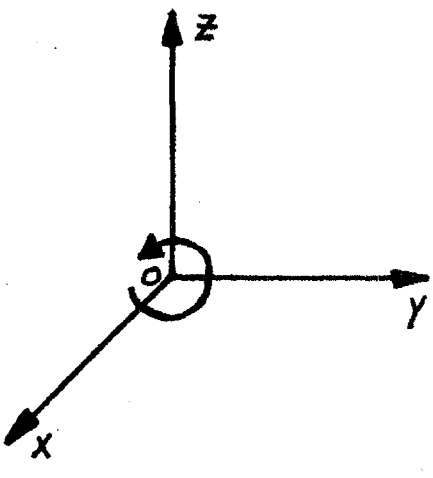
2.- Dirección: perpendicular al plano definido por los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

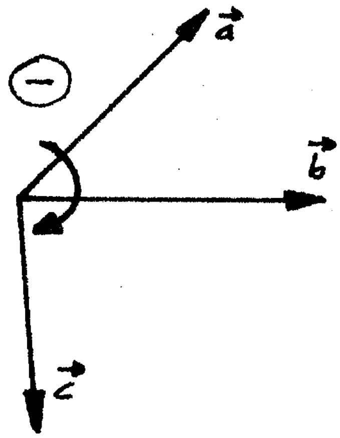
3.- Sentido: El sentido será positivo cuando el giro de $\vec{a}$ (multiplicando) a $\vec{b}$ (multiplicado) por el camino más corto se produzca en el mismo sentido que el del triedro formado por por los ejes O X Y Z





De otra manera, el sentido será positivo cuando el giro de $\vec{a}$ a $\vec{b}$ por el camino más cortose realice en sentido contrario a las agujas de un reloj o el de avance del tornillo dextrógiro o del sacacorchos (regla del sacacorchos).





<u>Representanción</u>

El producto vectorial se representa mediante las siguientes notaciones:

$$\vec{c} = \vec{a}\wedge\vec{b} = \vec{a} \times \vec{b} = [\vec{a}, \vec{b}]$$

Nosotros emplearemos la primera.

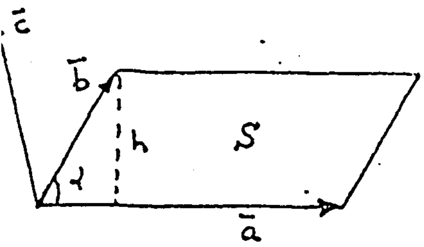
El <u>producto</u> vectorial es <u>nulo</u> cuando:

1.- Lo son $\vec{a}$ o $\vec{b}$

2.- Cuando sen $\alpha = 0$, lo que es lo mismo $\vec{a}$ es: paralelo, coincidente o contrario (opuesto) a $\bar{b}$.

Significado físico del producto vectorial

Representa el area del paralelogramo constituido por $\bar{a}$ y $\bar{b}$ llevados a un origen común



$|\bar{a} \wedge \bar{b}| = |\bar{a}|\ |\bar{b}| \cdot \operatorname{sen}\alpha$

ya que el area del paralelogramo es igual a base por altura

como $|\bar{b}| \operatorname{sen}\alpha = h \Longrightarrow$ altura

$|\bar{a}| \Longrightarrow$ base

luego $\Longrightarrow |\bar{a} \wedge \bar{b}| = h \cdot B = S$/c.q.d

Propiedades

1.- No es conmutativo : $(\bar{a} \wedge \bar{b}) = -(\bar{b} \wedge \bar{a})$

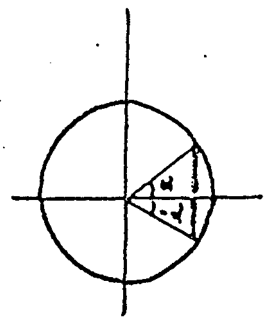
Demostración:

$|\bar{a} \wedge \bar{b}| = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \operatorname{sen}\alpha$

$|\bar{b} \wedge \bar{a}| = |\bar{b}| \cdot |\bar{a}| \cdot \operatorname{sen}(-\alpha)$

pero como $\operatorname{sen}\alpha = -\operatorname{sen}(-\alpha)$

no es conmutativo



2.- Distributiva respecto de la suma de vectores

$\bar{a} \wedge (\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a} \wedge \bar{b} + \bar{a} \wedge \bar{c}$ (III)

Para demostrarlo hagamos coincidir el eje de referencia OZ con el vector $\bar{a}$

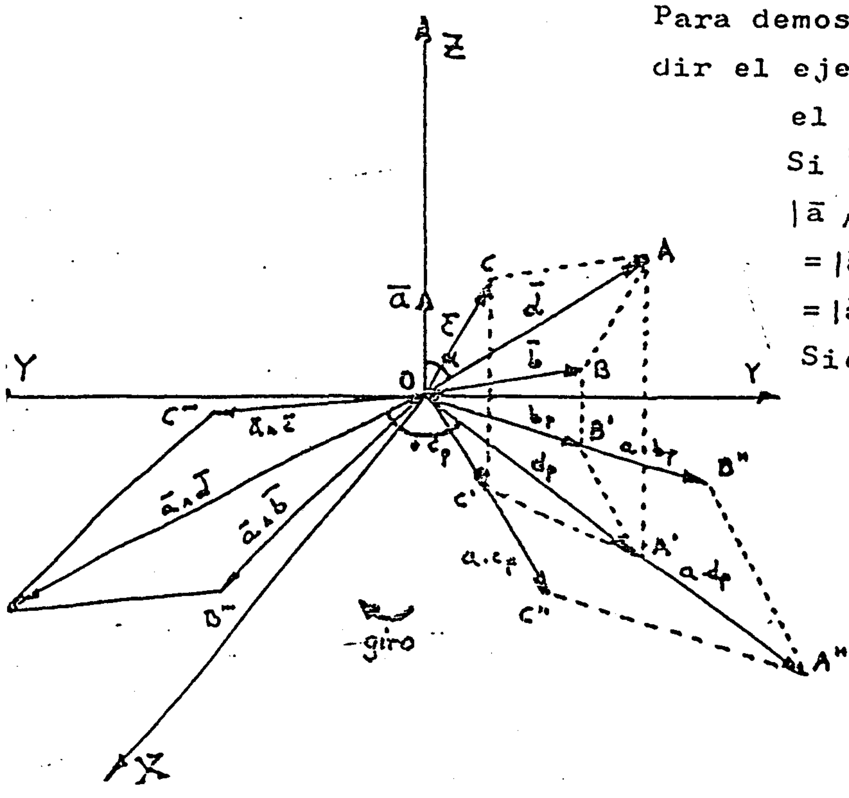
Si $\bar{b} + \bar{c} = \bar{d}$

$|\bar{a} \wedge (\bar{b} + \bar{c})| = |\bar{a} \wedge \bar{d}| =$

$= |\bar{a}| \cdot |\bar{d}| \cdot \operatorname{sen}\alpha =$

$= |\bar{a}| \cdot |\bar{d}| \cos(90 - \alpha) = |\bar{a}|\ d_p$

Siendo d_p la proyección



$\vec{d}$ sobre XOY.

Igualmente $|\vec{a} \wedge \vec{b}| = |\vec{a}| . |\vec{b}| \text{sen} \beta = |\vec{a}| . |\vec{b}| \cos (90-\beta) = |\vec{a}| . b_p$
$|\vec{a} \wedge \vec{c}| = |\vec{a}| . |\vec{c}| \text{ sen } \gamma = |\vec{a}| . |\vec{c}| \cos (90-\gamma) = |\vec{a}| . c_p$
Proyectando ($\vec{OB} = \vec{b}$, $\vec{OC} = \vec{c}$, $\vec{OA} = \vec{d}$) sobre el plano XOY hemos/ obtenido ($\vec{OB}' = \vec{b}_p$, $\vec{OC}' = \vec{c}_p$, $\vec{OA}' = \vec{d}_p$), multiplicandos por $\vec{a}$ obtenemos $\vec{OB}''$ $\vec{OC}''$ y $\vec{OA}''$, tal que

$$|\vec{OA}''| = a . d_p$$
$$|\vec{OB}''| = a . b_p$$
$$|\vec{OC}''| = a . c_p$$

Y como $\vec{OA}'' = \vec{OB}'' + \vec{OC}''$ se verifica la igualdad módular $\Rightarrow |\vec{OA}''| = |\vec{OB}''| + |\vec{OC}''| \Rightarrow ad_p = ab_p = ab_p + ac_p$
que coinciden con la igualdad modular de la expreseón (III) == == $|\vec{a} \wedge \vec{d}| = |\vec{a} \wedge \vec{b}| + |\vec{a} \wedge \vec{c}|$

Para que se produzca la igualdad vectorial tendrá -- que verificarse también la igualdad en las direcciones y sentidos en ambos lados de la ecuación (III). Para ello giraremos - 90º con eje el vector a el paralelogramo OB" A" C", con lo que obtenemos otro paralelogramo O B''' A'''C''' sobre el plano XOY. Cumpliendose que:

1.- $\vec{OA}''$ es perpendicular a $\vec{a}$ por estar contenido en el - plano XOY y también es perpendicular a $\vec{a}$ por estar contenido - en el plano XOY y también es perpendicular a $\vec{d} = \vec{b} + \vec{c}$ por el giro efectuado de 90º, luego coincide en dirección con la de - $\vec{a} \wedge \vec{d}$. La regla del sacarcorchos nos demuestra que el sentido/ de $\vec{a} \wedge \vec{d}$ coincida eon el de $\vec{OA}''$.

Antes ya demostramos que el módulo de $|\vec{OA}'''| = |\vec{OA}''| = |\vec{a} \wedge \vec{d}| = |\vec{a} \wedge (\vec{b} + \vec{c})|$, luego $\vec{OA}''' = \vec{a} \wedge \vec{d}$

2.- $\vec{OB}'''$ es perpendicular a $\vec{a}$ por estar contenido en el plamo XOY y a $\vec{b}$ por el giro de 90º, luego coincide en dirección con $\vec{a} \wedge \vec{b}$. También coincide en sentido (cono se aprecia al aplicar la regla del sacacorchos) y en módulo luego $\vec{OB}''' = \vec{a} \wedge \vec{b}$

3.- Igualmente $\vec{OC}''' = \vec{a} \wedge \vec{c}$

Con lo que se verifica que $\vec{a} \wedge \vec{d} = \vec{a} \wedge \vec{b} + \vec{a} \wedge \vec{c}$ c,qd

Expresión analítica del producto vectorial.-

Tenemos que $\vec{i} \wedge \vec{i} = \vec{j} \wedge \vec{j} = \vec{k} \wedge \vec{k} = 0 \Leftarrow$ al ser productos vectores paralelos

$|\vec{i} \wedge \vec{j}| = |\vec{j} \wedge \vec{k}| = |\vec{k} \wedge \vec{i}| = 1 \Leftarrow$ al ser/ perpendiculares los unitarios sen 90º = 1

$|\vec{j} \wedge \vec{i}| = |\vec{k} \wedge \vec{j}| = |\vec{i} \wedge \vec{k}| = -1 ==$ sen sen (-90)º = sen 270º = -1

y según la definición de producto vectorial

$\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}$; $\vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i}$; $\vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j}$; $\vec{j} \wedge \vec{i} = -\vec{k}$; $\vec{k} \wedge \vec{j} = -\vec{i}$; $\vec{i} \wedge \vec{k} = -\vec{j}$

Si referimos $\vec{a}$ y $\vec{b}$ al triedro octogonal OXYZ

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = (a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k}) \wedge (b_1 \vec{i} + b_2 \vec{j} + b_3 \vec{k}) =$$

$$= a_1 b_1 \vec{i} \wedge \vec{i} + a_1 b_2 \vec{i} \wedge \vec{j} + a_1 b_3 \vec{i} \wedge \vec{k} +$$

$$+ \cancel{a_2 b_1 \vec{j} \wedge \vec{i}} + \cancel{a_2 b_2 \vec{j} \wedge \vec{j}} + \cancel{a_1 b_3 \vec{i} \wedge \vec{k}} +$$

$$+ a_2 b_1 \vec{j} \wedge \vec{i} + a_2 b_2 \vec{j} \wedge \vec{j} + a_2 b_3 \vec{j} \wedge \vec{k} +$$

$$+ a_3 b_1 \vec{k} \wedge \vec{i} + a_3 b_2 \vec{k} \wedge \vec{j} + a_3 b_3 \vec{k} \wedge \vec{k} ==$$ (agru - pando términos)

$$= (a_2 b_3 - a_3 b_2)\vec{i} + (a_3 b_1 - a_1 b_3)\vec{j} +$$

$$+ (a_1 b_2 - a_2 b_1)\vec{k} =$$ expresión que coincide con - la siguiente

$$= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \vec{i} + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \vec{k}$$

Que equivale al desarrollo del determinante siguiente:

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Se observa que si cambiamos/ dos filas del determinante/ cambia el signo, con lo que se puede apreciar la no conmutatividad del producto vectorial.

<u>Triple producto vectorial</u>

$$\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = \vec{b}\,(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}\,(\vec{b} \cdot \vec{a})$$

(IV) Esta fórmula se verifica como a continuación vamos a ver y demostrar:

Tomamos el primer mienbro de la igualdad

$$\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ (b_2 c_3 - b_3 c_2) & (b_3 c_1 - b_1 c_3) & (b_1 c_2 - b_2 c_1) \end{vmatrix}.$$

$$= \vec{i}\,\left[a_2\,(b_1 c_2 - b_2 c_1) - a_3\,(b_3 c_1 - b_1 c_3)\right] + \vec{j}\,\left[\ldots\ldots\right] +$$
$$+ \vec{k}\,\left[\ldots\ldots\right]$$

Y el otro miembro de la ecuación será igual a

$$\vec{b}\,(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{b} \cdot \vec{a}) = \vec{i}\,\left[b_1\,(a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3) - c_1 (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)\right] +$$
$$+ \vec{j}\,[\ \ldots\ ] + \vec{k}\,[\ldots\ldots] = \vec{i}\,\left[a_2 (b_1 c_2 - b_2 c_1) - a_3 (b_3 c_1 - b_1 c_3)\right] +$$
$$+ \vec{j}\,[\ \ldots\ ] + \vec{k}\,[\ldots]$$

Con lo que se verifica la igualdad de las componentes según el eje OX (lo mismo ocurrirá según las de OY y Oz), por lo tanto queda demostrado la fórmula (IV)

<u>Ejemplos de aplicación del producto vectorial.-</u>

Momento estático $\vec{Q} = \vec{r} \wedge \vec{v}$. Momento cinético $\vec{M} = \vec{r} \wedge m\vec{v}$. Velocidad en el movimiento de rotación $\vec{v} = \vec{\omega} \wedge \vec{r}$

Las ecuaciones de Maxwell que nos relacionan los vectores de campo eléctrico y magnético $\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\,(\partial \vec{B} / \partial t)$ etc

PROBLEMAS

8.- Hallar el producto vectorial de $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ y $\vec{b} =$ $= \vec{i} + \vec{j}$

Mediante la aplicación de la expresión analítica del producto vectorial.

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \vec{i}(1) + \vec{j}(-1) + \vec{k}(2-1) = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$$

9.- Demostrar que el vector $\vec{a} = \vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$ es paralelo al vector $\vec{b} = -2\vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k}$

Método I .- Sabemos que el producto vectorial de dos vectores paralelos es 0. Hallamos el producto vectorial.

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \end{matrix} = \vec{i}(4-4) + \vec{j}(-2+2) + \vec{k}(4-4) = $$
$$= 0 \text{ c.q.d.}$$

Método II.- El coseno valdrá 1 ó (-1) si son paralelos $\vec{a}$ y $\vec{b}$

$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{-2 -8 -2}{\sqrt{6}\ \sqrt{24}} = \frac{-12}{\sqrt{144}} = \frac{-12}{12} =$$
$$= -1 == \vec{a} \text{ y } \vec{b} \text{ forman } 180º$$

10.- Hallar el area del paralelogramo que forman los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ siendo $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$ y $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$

El módulo del producto vectorial coincide en valor con el area del paralelogramo que encierran ambos vectores.

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -3\vec{i} - 2\vec{j} + (-2+3)\vec{k} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$$

luego $S = |\vec{a} \wedge \vec{b}| = \sqrt{3^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{14}$

11.- Hallar el área del triángulo que forman los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ siendo

$\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}$

$\vec{b} = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$

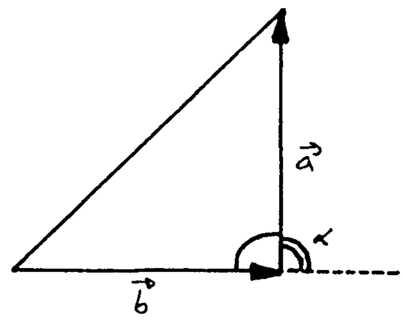
El área del triángulo vale

$S = 1/2$ (Base x altura)

$|\vec{b}| =$ Base $= B$

$|\vec{a}| \operatorname{sen} \alpha =$ altura $= h$

$S_1 = |\vec{a} \wedge \vec{b}| = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \operatorname{sen}\alpha = B.h$



$$S = (1/2)S_1 = (1/2)|\vec{a} \wedge \vec{b}| == (1/2)\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = (1/2)\left[\vec{i}(2) + \vec{j}(-2) + \vec{k}(-1-1)\right]$$

$$S = (1/2)\sqrt{2^2 + (-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{3}$$

12.- Los vectores de posición respecto de O en los puntos A,B,C son:

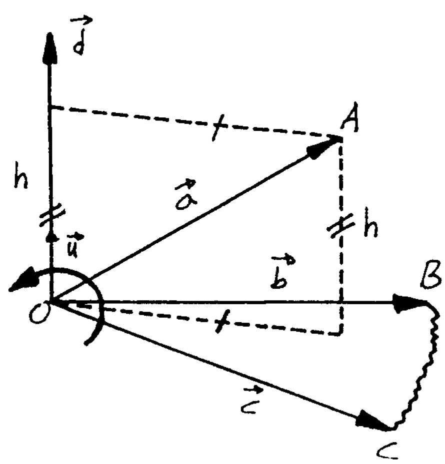
$\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$

$\vec{b} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$

$\vec{c} = 2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$

Hallar la distancia de A al plano OBC

La proyección ortogonal de A sobre el plano OBC nos determina la distancia de A a dicho plano. Esta distancia h/ coincide en dirección con la resultante del producto vectorial.



$$\vec{d} = \overrightarrow{OC} \wedge \overrightarrow{OB} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i}(-1+2) + \vec{j}(-2+2) + \vec{k}(2-1) = \vec{i} + \vec{k}$$

La proyección de $\vec{a}$ sobre $\vec{d}$ nos dará [illegible] -

$h = \vec{a} \cdot \vec{u}$ [illegible]

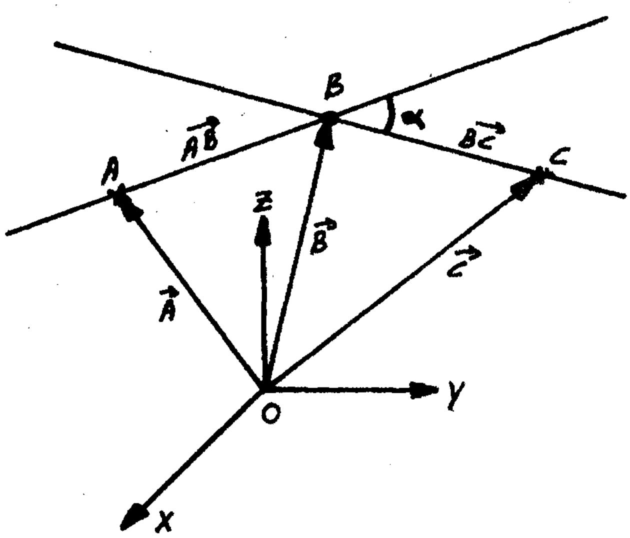
Siendo $\vec{u}$ el unitario según la dirección $\vec{d}$

$$\vec{u} = \vec{d}/ |\vec{d}| = (\vec{i} + \vec{k})/ \sqrt{2}$$

Aplicando la expresión analítica del producto escalar obtenemos el valor pedido

$$h = \vec{a} \cdot \vec{u} = (2/ \sqrt{2}) + (1/ \sqrt{2}) = 3/\sqrt{2}$$

13.- Hallar el ángulo que forman las rectas $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BC}$ definidas por los puntos A(1,1,1) B(2,2,1) y C(3,2,1)



Dos vectores según estas direcciones pueden ser estos:

$\overrightarrow{AB} = \vec{B} - \vec{A} = \vec{i} + \vec{j}$

$\overrightarrow{BC} = \vec{C} - \vec{B} = \vec{i}$

El ángulo lo podemos hallar mediante el producto escalar/

$$\frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{BC}|} = \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\alpha = 45º$$

o bien, mediante el producto vectorial

$$\frac{|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{BC}|}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{BC}|} = \text{sen}\,\alpha = \frac{\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{\sqrt{2}} = \frac{\vec{k}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\alpha = 45º$$

14.- Hallar el ángulo que forman las rectas $\overrightarrow{AB}$ y $x/2 = (y-1)/1 = z/0$

Siendo A(0,1,1) y B(4,3,1)

$\overrightarrow{AB} = \vec{B} - \vec{A} = 4\vec{i} + 2\vec{j}$

El vector director de la recta == $x/z = (y-1)/1 = z/0$

es $\vec{v} = 2\vec{i} + \vec{j}$

luego $\Rightarrow \vec{v} \cdot \overrightarrow{AB} = |\vec{v}| \cdot |\overrightarrow{AB}| \cdot \cos\alpha \Longrightarrow \cos\alpha =$

$$= (8+2)/(\sqrt{20}\cdot\sqrt{5}) = 10/ \sqrt{100} = 1$$

$$\alpha = \text{arcos}\ 1 = 0º$$

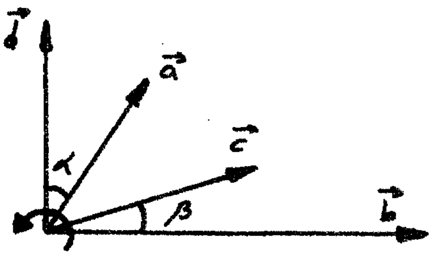
4.8. Producto mixto de 3 vectores a,b,c,.-

Es el producto escalar de un vector $\vec{a}$ por el vector/ resultante del producto vectorial de $\vec{b}$ por $\vec{c}$, luego es un escalar P definido por

$$P = \vec{a} \cdot (\vec{b} \wedge \vec{c}) \quad ó \quad P = \vec{a} \cdot \vec{b} \wedge \vec{c}$$

No hace falta paréntesis porque carece de sentido hablar de $(\vec{a}\cdot\vec{b}) \wedge \vec{c}$ puesto que $(\vec{a}\cdot\vec{b})$ es un escalar y no se puede/ efectuar un producto vectorial si no tenemos 2 vectores.

$$P = \vec{a}\cdot\vec{b} \wedge \vec{c} = |\vec{a}|\,|\vec{b} \wedge \vec{c}| \cos\alpha = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\,|\vec{c}| \operatorname{sen}\beta \cos\alpha$$



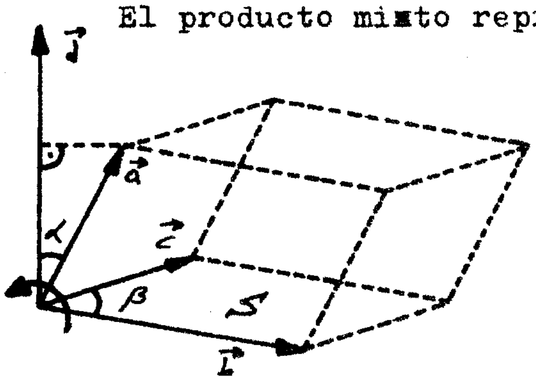
El producto mixto es nulo cuando:

a) $\vec{a}$,$\vec{b}$ y $\vec{c}$ son coplanarios. Entonces $\vec{d} = \vec{b} \wedge \vec{c}$ es perpendicular a $\vec{a}$, luego el producto escalar es 0, con lo que el producto mixto es 0.

b) Los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ ó $\vec{c}$ sean paralelos. Si $\vec{b}$ es paralelo a $\vec{c}$, el producto vectorial $(\vec{b} \wedge \vec{c})$ es nulo con lo que el producto mixto también lo es. Si $\vec{b}$ ó $\vec{c}$ son paralelos a $\vec{a}$, tenemos un producto escalar de dos vectores perpendiculares.

c) $\vec{a}$, $\vec{b}$, ó $\vec{c}$ sean nulos

El producto mixto representa el volumen de un prisma de lados $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$.



Voluemn = Superficie basex x altura

$|\vec{b} \wedge \vec{c}|$ = S = Superficie de la base.

$|\vec{a}| \cdot \cos\alpha$ = h = altura (Proyec el prisma el oblicuo)

$$P = \underbrace{b \ \ c \ \ \text{sen}\,\beta}_{\substack{\text{area}\\ \text{base}}}\ \underbrace{.a\cos\alpha}_{\text{altura}}$$

Si $P = \vec{a}.\vec{b}\wedge\vec{c} = 0 \Longrightarrow$ el volumen del paralepípedo es 0 ($\vec{a},\vec{b}$ y $\vec{c}$ son coplanarios ó $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ son paralelos).

Expresión analítica.-

$$P = \vec{a}.\vec{b}\wedge\vec{c} = \vec{a}\ .\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1(b_2\ c_3 - b_3c_2) + \\ + a_2(b_2c_1 - b_1c_3) +$$

$$+ a_3(b_1c_2 - b_2c_1) = a_1\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

que coincide con el desarrollo del determinante

$$P = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Si permutamos dos filas entre sí, nos cambia el signo:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} =$$

$$= -\begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

luego $\Longrightarrow \vec{a}.\vec{b}\wedge\vec{c} = \vec{b}.\vec{c}\wedge\vec{a} = \vec{c}.\vec{a}\wedge\vec{b}$

$$\vec{a}.\vec{b}\wedge\vec{c} = -\vec{b}.\vec{a}\wedge\vec{c} = -\vec{c}.\vec{b}\wedge\vec{a} = -\vec{a}.\vec{c}\wedge\vec{b}$$

De la expresión $\vec{a}.\vec{b}\wedge\vec{c} = \vec{c}.\vec{a}\wedge\vec{b}$ según la propiedad de commutativa del producto escalar se llega a $\Longrightarrow \vec{a}.\vec{b}\wedge\vec{c} = \vec{a}\wedge\vec{b}.\vec{c}$ con lo que queda demostrado que se pueden permutar los signos/

aritméticos del producto mixto.

PROBLEMAS

15.- Hallar el valor de $\vec{C} \wedge [(\vec{C} \wedge \vec{A}) \wedge (\vec{C} \wedge \vec{B})]$

$\vec{P} = (\vec{C} \wedge \vec{A}) \wedge (\vec{C} \wedge \vec{B}) = \vec{D} \wedge (\vec{C} \wedge \vec{B}) = -\vec{B}(\vec{C} \cdot \vec{D}) +$ $+ \vec{C}(\vec{D} \cdot \vec{B})$ $\Leftarrow$ Según se deduce de aplicar la fórmula del triple producto vectorial, luego $\vec{P} = -\vec{B}\ (\vec{C} \cdot \vec{C} \wedge \vec{A}) + \vec{C}(\vec{C} \wedge \vec{A} \cdot \vec{B})$

Se simplifica el valor de $\vec{P}$ ya que tenemos un producto mixto con dos filas iguales en el determiante midiante el cual lo expresamos analíticamente.

$$\vec{C} \wedge [(\vec{C} \wedge \vec{A}) \wedge (\vec{C} \wedge \vec{B})] = \vec{C} \wedge [(-\vec{C})(\vec{C} \wedge \vec{A} \cdot \vec{B})] = 0$$

Como $\vec{C} \wedge \vec{A} \cdot \vec{B}$ es un escalar por ser un producto mixto/ tenemos un producto vectorial de dos vectores paralelos (que vale 0)

16.- Hallar el volumen que definen los vectores $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$ y $\vec{c} = \vec{j} + \vec{k}$

Para hallar el volumen aplicamos la expresión analítica del producto mixto

$$V = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = |-3 -2 -(2)| = 7$$

17.- Demostrar que $\vec{c} \cdot [\ (\vec{b} + \vec{c}) \wedge (\vec{c} + \vec{a})] [\ \vec{a} \cdot \vec{b} \wedge \vec{c}] =$ $= A$, es siempre nulo

$$\text{Hagamos}\quad \vec{B} = (\vec{b}+\vec{c}) \wedge (\vec{c}+\vec{a}) = \overline{\vec{b} \wedge \vec{c} + \vec{b} \wedge \vec{a} + \vec{c} \wedge \vec{c}} + \vec{c} \wedge \vec{a}$$

$$c \cdot [\ (\vec{b}+\vec{c}) \wedge (\vec{c}+\vec{a})] = \vec{c} \cdot \vec{b} \wedge \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{b} \wedge \vec{a} + \vec{c} \cdot \vec{c} \wedge \vec{a}$$

luego

$$A = \vec{c} \cdot [\ (\vec{b}+\vec{c}) \wedge (\vec{c}+\vec{a})] [\ \vec{a} \cdot \vec{b} \wedge \vec{c}] = \vec{c} \cdot \vec{b} \wedge \vec{a} + \vec{a} \cdot \vec{b} \wedge \vec{c} \Longrightarrow$$

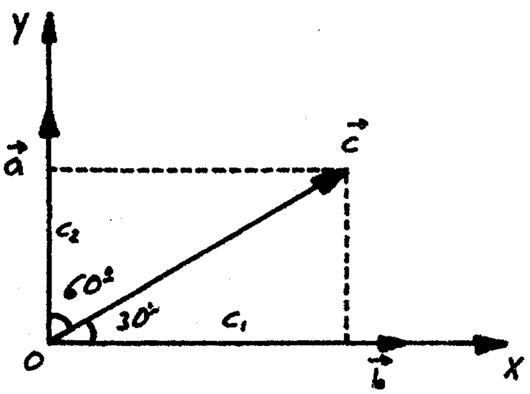
apàicando la propiedad commutativa del producto escalar

$$A = \vec{b} \wedge \vec{a}.\vec{c} + \vec{a}.\vec{b} \wedge \vec{c} = -\vec{a} \wedge \vec{b}.\vec{c} + \vec{a}\vec{b} \wedge \vec{c}$$

Y si cambiamos el signo aritmético en el producto mix to no se altera el resultado

luego $A = -\vec{a}.\vec{b} \wedge \vec{c} + \vec{a}.\vec{b} \wedge \vec{c} = 0$

18.- Dados tres vectores libres $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ situados en un - plano, de módulos 1, 2 y 3 respectivamente, el primero de di - rección N-S y sentido hacía el N, el segundo de dirección E-O/ y sentido hacía el E, el tercero formará 60º y 30º respectivamente con el primero y el segundo y sentido hacía levante. Determinar el vector suma de éstos tres vectores.



$$\vec{a} = a_1\,\vec{i} + a_2\,\vec{j} + a_3\,\vec{k}$$
$$\vec{b} = b_1\,\vec{i} + b_2\,\vec{j} + b_3\,\vec{k}$$
$$\vec{c} = c_1\,\vec{i} + c_2\,\vec{j} + c_3\,\vec{k}$$

$$\vec{S} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$$
$$S_i = a_i + b_i + c_i$$

Vamos a hallar los componentes de $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$

$a_1 = |\vec{a}| \cos 90º = 0$

$a_2 = |\vec{a}| \operatorname{sen} 90º = a$

$a_3 = 0$

$b_1 = |\vec{b}| \cos 0º = b$

$b_2 = |\vec{b}| \operatorname{sen} 0º = 0$

$b_3 = 0$

$$\vec{a} = a\vec{j} = \vec{j}$$
$$\vec{b} = b\vec{i} = 2\vec{i}$$
$$c = ((c\sqrt{3})/2)\vec{i} + (c/2)\vec{j} = ((3\sqrt{3}/2))\vec{i} + (3/2)\vec{j}$$
$$\vec{S} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = ((4+3\sqrt{3})/2)\vec{i} + (5/2)\vec{j}$$
$$|\vec{S}| = \sqrt{[(16 + 27 + 24\cdot\sqrt{3})/4] + [25/4]}$$

19.- Hallar el vector unitario $\vec{u}$ en el origen sabiendo qu los cosenos directores de la recta que lo contiene son directa mente proporcionales a 2, 1 y -2

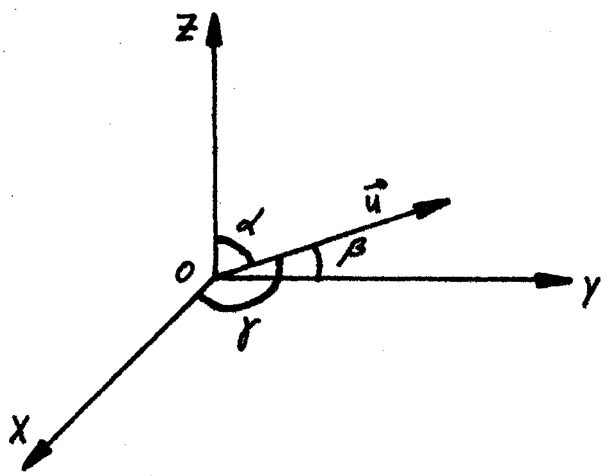
Cosenos directores, son los cosenos de los ángulos - que forma dirección dada con los ejes, verificandose ==

$$\Longrightarrow \vec{u} = u_2\,\vec{i} + u_2\,\vec{j} + u_3\,\vec{k}$$

Las componentes del vector unitario coinciden con -- las proyecciones de u sobre los ejes $|\vec{u}|\cos\alpha = u_1$

$|\vec{u}|\cos\beta = u_2$

$|\vec{u}|\cos\gamma = u_3$



El valor de los cosenos - directores coinciden con/ el de las componentes del unitario según esa dirección $|\vec{u}| = u_1/\cos\alpha = u_2/\cos\beta = u_3/\cos\gamma$ imponemos la - condición de proporcionalidad.

$u_1/2 = u_2/1 = u_3/-2$ (1) (2)

2 ecuaciones, necesitamos otra porque tenemos tres - incognitas (u_1, u_2, y u_3), las componentes de $\vec{u}$
La otra ecuación es la dada por el valor modular del unitario.

$$|\vec{u}| = 1 = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^3}\ (3) \Longrightarrow 1 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^3 \quad (3)$$

$$\begin{cases} (1) & u_1 = 2u_2 \\ (2) & -2u_2 = u_3 \\ (3) & 1 = \sqrt{4u_2^2 + u_2^2 + 4u_2^2} = 3u_2 \Longrightarrow u_2 = \end{cases}$$

$=1/3 \quad u_1 = 2/3 \quad u_3 = -2/3$

$\vec{u} = (2/3)\vec{i} + (1/3)\vec{j} - 2/3)\vec{k}$

20.- Dados los vectores libres $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$, donde

$$\vec{a} = 5\vec{i} + \vec{k}$$
$$\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$$
$$\vec{c} = 4\vec{i} - 2\vec{j}$$

Se pide: 1) Demostrar que forman un triángulo rectángulo, 2) Hallar la superficie de dicho triángulo.

1) El triángulo es un figura plana, $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ tendrán/ que ser coplanarios, luego su producto mixto es 0

$$P = \vec{a}.\vec{b}\wedge\vec{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 4 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 10-8-2 = 0 \text{ c.q.d.}$$

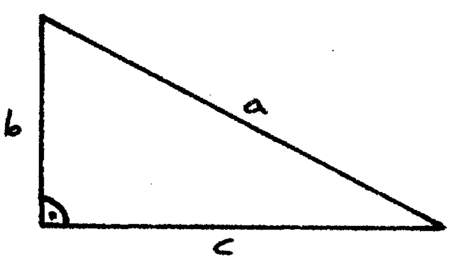
Para que el tríángulo sea rectángulo dos de los lados tienen que ser perpendiculares, luego el producto escalar de -- los lados perpendiculares es nulo.

$\vec{a}.\vec{b} = 5.1 + 0 + 1.1 = 6$

$\vec{b}.\vec{c} = 1.4 + 2 .(-2) + 0 = 0$ $\quad$ $\vec{b}$ y $\vec{c}$ son perpendiculares

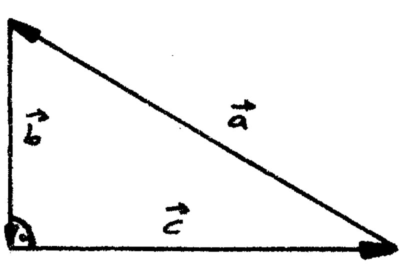
$\vec{c}.\vec{a} = 4.5 + 0 + 0 = 10$

Para que $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ formen un triángulo, ha de existir/ una combinación lineal entre sus lados. Por lo tanto se verificará una de los hipótesis siguientes



$$\Longrightarrow \quad \begin{aligned} \vec{a} &= \vec{b} + \vec{c} \quad (1) \\ \vec{a} &= \vec{b} - \vec{c} \quad (2) \\ \vec{a} &= \vec{c} - \vec{b} \quad (3) \end{aligned}$$

(1) $\Longrightarrow 5\vec{i} + \vec{k} = (\vec{i}+2\vec{j} + \vec{k}) + (4\vec{i} - 2\vec{j})$. Vemos que se/ verifica la primera, luego $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$ forman un triángulo rectángulo.



2) $S = \left|(1/2) \quad (\vec{b} \wedge \vec{c})\right|$

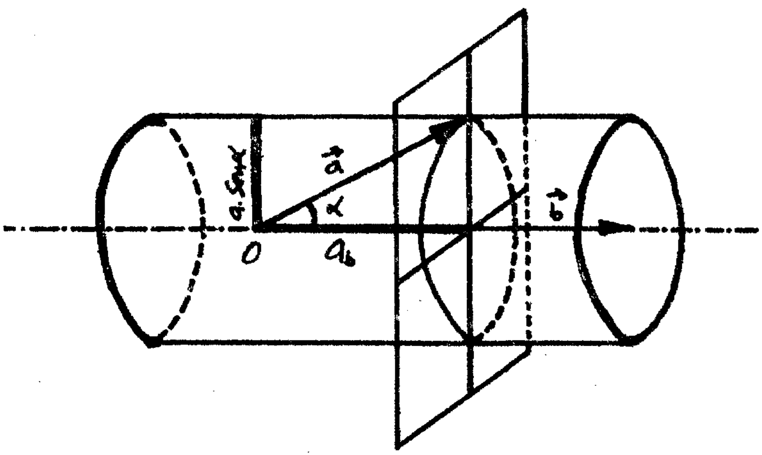
$$\vec{b} \wedge \vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 1 \\ 4 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \vec{i}\,(2) + \vec{j}\,(4) + \vec{k}\,(-2-8) =$$

$$= 2\vec{i} + 4\vec{j} - 10\vec{k}$$

$$|\vec{b} \wedge \vec{c}| = \sqrt{4 + 16 + 100} = \sqrt{120} = 2 \cdot \sqrt{30}$$

$$S = 1/2\, |\vec{b} \wedge \vec{c}| = \sqrt{30}$$

21.- Nos dan a) un vector $\vec{b}$ fijo y definido. b) el producto escalar de dicho vector por otro vector $\vec{a}$.c) El producto - vectorial $\vec{b}\wedge\vec{a}$. Hallar el lugar geométrico del extremo de $\vec{a}$



$\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\,\cos\alpha = a_b\,|\vec{b}|$

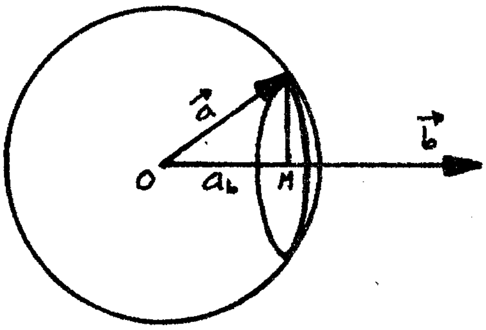
$a_b = (\vec{a}.\vec{b})/|\vec{b}| =$ <u>constante</u>

$\Longrightarrow$ El lugar geómétrico/ es un plano perpendicular a $\vec{b}$.

$|\vec{a} \wedge \vec{b}| = |\vec{a}|.|\vec{b}|\,\text{sen}\,\alpha \Longrightarrow$ $==$ <u>a sen α</u> $= |(\vec{a} \wedge \vec{b})|/|\vec{b}| =$ <u>constante</u> $==$ lugar geométrico, cilindro. Intersección del plano y el cilindro $\Longrightarrow$ circunferencia (lugar geométrico del del extremo de $\vec{a}$)

22.- Nos dan a) El módulo del vector $\vec{a}$.b) El valor del -- producto escalar de $\vec{a}.\vec{b}$ = c.c) El vector $\vec{b}$, fijo definido.

Hallar el lugar geométrico del extremo de $\vec{a}$.



$OH = a_b = (\vec{a}.\vec{b})/\ |\vec{b}| = c/|\vec{b}| =$ $=$ constante $\Longrightarrow$ l.g. un plano perpendicular a $\vec{b}$

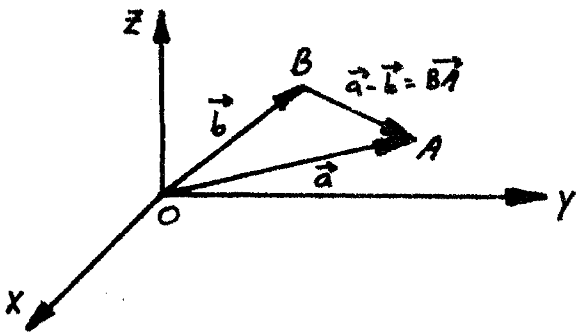
$|\vec{a}|$ = constante $\Longrightarrow$ l.g. esfera de centro 0 y radio $|\vec{a}|$

La intersección de la esfera con el plano nos da una circunferencia.

23.- Dados los vectores $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$

$$\vec{b} = 2\vec{i} - d\vec{j} + \vec{k}$$

Hallar $\vec{d}$ para que el vector que une los extremos de/ dichos vectores sea perpendicular al vector $\vec{c} = -\vec{j} + 3\vec{k}$



$\vec{a} - \vec{b} = \vec{BA} = -\vec{i} + (d+1)\vec{j} +$ $+ (-3)\vec{k}$

$\vec{BA} \cdot \vec{C} = 0 \Longrightarrow (-1)(d+1) +$ $+ (-3)(3) = 0$

$-d -1 -9 = 0 \Longrightarrow d = -10$

4.9. Derivación vectorial.-

Un vector libre cambia cuando lo hacen cualquiera de los elementos que lo determinan: módulo, dirección o sentido.

Estableciendose una dependencia respecto de un parámetro (que generalmente es el tiempo).

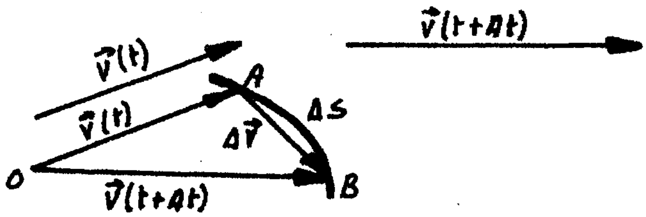
$$\vec{v} = \vec{v}\,(t)$$

Derivación es la variación de algo respecto de un -- parámetro

$$\vec{v}\,' = \frac{d\vec{v}\,(t)}{dt}$$

Si llevamos los diferentes estados de variación de - un vector $\vec{v}$ a un origen común 0, cosa que podemos realizar al/ ser los vectores libres, las sucesivas posiciones del extremo/

ser los vectores libres, las sucesivas posiciones del extremo/



de $\vec{v}$ nos determina una - curva llamada indicatríz/ (u hodógrafa)

En un Δt, $\vec{v}(t)$ habrá sufrido un incremento ($\Delta \vec{v}$) y habrá pasado a $\vec{v}(t + \Delta t)$, observandose en el dibujo que

$$\Delta v = \vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}\,(t)$$

Se define derivada vectorial como el límite (si existe).

$$\vec{v}'(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t}$$

Cuando $\Delta t \to 0$, A tiendo a confudirse con B. Luego en el límite, la línea de acción de $\frac{\Delta v(t)}{\Delta t}$, que tiene la dirección de la cuerda $\overrightarrow{AB}$, estará sobre la tangente a la indicatriz.

Luego $\vec{v}(t)$, tiene por módulo dv/dt, dirección la de la tangente, y sentido el del movimiento.

Vamos a hallar las <u>componentes de la derivada</u>

$$\vec{v}(t) = v_1\,(t)\vec{i} + v_2\,(t)\,\vec{j} + v_3\,(t)\vec{k}$$

Tenemos

$$\vec{v}(t + \Delta t) = v_1\,(t + \Delta t)\vec{i} + v_2\,(t + \Delta t)\vec{j} + v_3\,(t + \Delta t)\vec{k}$$

Los vectores $\vec{v}(t)$ y $\vec{v}(t + \Delta t)$ en función de sus componentes)

Introduciendo estos valores en la fórmula de la derivada

$$\vec{v}'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{/\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{t} = \lim_{t\ 0}$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{v_1\,(t + \Delta t) - v_1\,(t)}{\Delta t}\vec{i} + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v_2\,(t + \Delta t) - v_2\,(t)}{\Delta t}\vec{j} +$$

$$+ \lim \frac{v_3\,(t + \Delta t) - v_3\,(t + \Delta t) \quad v_3\,(t)}{}$$

$$+ \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v_3\,(t + \Delta t) - v_3\,(t)}{\Delta t}\,\vec{k} \Longrightarrow$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv_1}{dt}\,\vec{i} + \frac{dv_2}{dt}\,\vec{j} + \frac{dv_3}{dt}\,\vec{k}$$ Derivada en función de las componentes

Las componentes de la derivada son las derivadas de las componentes.

El módulo de la derivada valdrá $\Rightarrow \dfrac{dv}{dt} = \sqrt{\dfrac{dv_1^2}{dt} + \dfrac{dv_2^2}{dt} + \dfrac{dv_3^2}{dt}}$

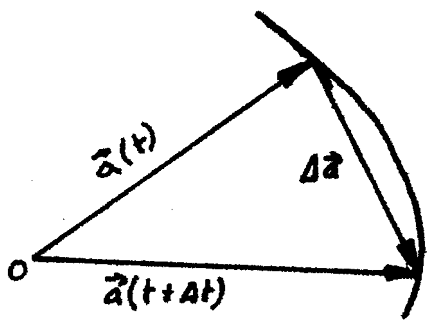
Derivada de la suma de varios vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$, ... $\vec{n}$

$$\frac{d(\vec{a}\ \ \vec{b}\ \ \ldots\ldots \vec{n})}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{a}(t + \Delta t) \pm \vec{b}(t + \Delta t) \pm \ \ldots \pm \vec{n}(t + \Delta t)}{\Delta t}$$

$$\frac{-\vec{a}(t) \pm \vec{b}\,(t) \pm \cdots \pm \vec{n}\,(t)}{\Delta t} =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\left[(\Delta \vec{a} + \vec{a}) \pm (\Delta \vec{b} + \vec{b}) \pm \ \ldots \pm (\Delta \vec{n} + \vec{n})\right] - \left[\vec{a} \pm \vec{b} \pm \ldots \pm \vec{n}\right]}{\Delta t} =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{a}}{\Delta t} \pm \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{b}}{\Delta t} \pm \ldots \pm \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{n}}{\Delta t} = \frac{d\vec{a}}{dt} \pm \frac{d\vec{b}}{dt} \pm \ldots \pm \frac{d\vec{n}}{dt}$$



$\Delta \vec{a} = \vec{a}(t + \Delta t) - \vec{a}(t)$

$\vec{a}(t + \Delta t) = \Delta \vec{a} + \vec{a}(t)$

Derivada del producto de un escalar por un vector

$$\frac{dm\vec{a}}{dt} = \frac{dm}{dt}\,\vec{a} + m\,\frac{d\vec{a}}{dt}$$ Como vamos a demostrar

$$\frac{d m\vec{a}}{dt} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{m(t+\Delta t)\,\vec{a}(t+\Delta t) - m(t)\,\vec{a}(t)}{\Delta t} =$$

$$= \lim_{\Delta t\to 0} \frac{(\Delta m+m)\,(\Delta\vec{a}+\vec{a})-m\vec{a}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta m\,.\,\Delta\vec{a} + \Delta m\,.\vec{a} + m.\Delta\vec{a}+m\vec{a} - m\vec{a}}{\Delta t} =$$

$$= \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta m}{\Delta t}\,\vec{a} + \lim_{\Delta t\to 0} m\,\frac{\Delta\vec{a}}{\Delta t} = \frac{dm}{dt}\,\vec{a} + m\,\frac{d\vec{a}}{dt} \quad \text{c.q.d}$$

$$\frac{dm}{dt} \neq 0 \text{ porque } m = m(t)$$

Derivada del producto escalar

$$\frac{d\,(\vec{a}.\vec{b})}{dt} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\vec{a}(t+\Delta t).\vec{b}(t+\Delta t) - \vec{a}(t)\,.\,\vec{b}(t)}{\Delta t} =$$

$$= \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\left[\vec{a}(t) + \Delta\vec{a}(t)\right]\,.\,\left[\vec{b}(t) + \Delta\vec{b}(t)\right] - \vec{a}(t).\vec{b}(t)}{\Delta t} =$$

$$= \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\cancel{\vec{a}.\vec{b}} + \vec{a}.\,\Delta\vec{b} + \Delta\vec{a}.\vec{b} + \cancel{\Delta\vec{a}.\Delta\vec{b}} - \cancel{\vec{a}.\vec{b}}}{\Delta t} =$$

$$= \vec{a}.\lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta\vec{b}}{\Delta t} + \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta\vec{a}}{\Delta t}\,.\vec{b} \Longrightarrow \frac{d(\vec{a}.\vec{b})}{dt} = \vec{a}.\,\frac{d\vec{b}}{dt} + \frac{d\vec{a}}{dt}.\vec{b}$$

Derivada del producto vectorial

$$\frac{d\,(\vec{a}\wedge\vec{b})}{dt} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\left[\vec{a}(t+\Delta t)\wedge\vec{b}(t+\Delta t)\right] - \left[\vec{a}(t)\wedge\vec{b}(t)\right]}{\Delta t} =$$

$$= \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\left[(\vec{a}(t) + \Delta\vec{a}(t)\;\wedge\;(\vec{b}(t) + \Delta\vec{b}(t)\right] - \left[\vec{a}(t)\wedge\vec{b}(t)\right]}{t} =$$

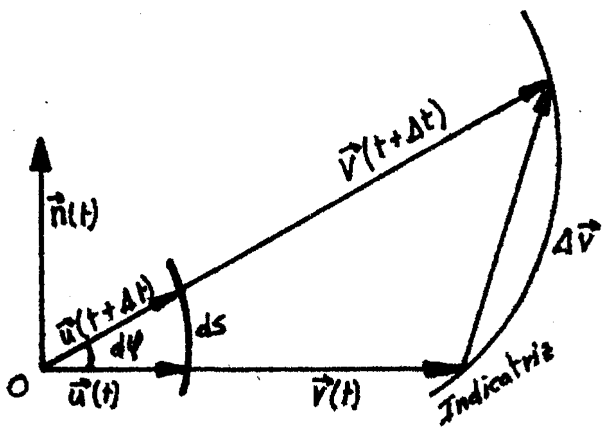
$$= \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\vec{a}\wedge\Delta\vec{b}}{\Delta t} + \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta\vec{a}\wedge\vec{b}}{\Delta t} = \vec{a}\wedge\lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta\vec{b}}{\Delta t} + \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta\vec{a}}{\Delta t}\wedge\vec{b} =$$

$= \vec{a} \wedge \frac{d\vec{b}}{dt} + \frac{d\vec{a}}{dt} \wedge \vec{b} = \vec{a} \wedge \frac{d\vec{b}}{dt} - \vec{b} \wedge \frac{d\vec{a}}{dt}$ Cambia el signo debido/ a la no conmutatividad del producto vectorial.

Componentes intrínsecas de la derivada

Tenemos un vector $\vec{v} = \vec{v}(t)$, al cabo de un incremento de t, $\vec{v}(t)$ se convierte en $\vec{v}(t + \Delta t)$ sufriendo una variación - $\Delta\vec{v}$.

LLevamos todos los estados de variación de $\vec{v}$ a un - origen común 0, cosa factible al ser un conjunto de - vectores libres. El extremo de $\vec{v}$ nos determina una indicatriz. El unitario según - la dirección de $\vec{v}$ es $\vec{u} = \vec{u}(t)$ al variar $\vec{v}$ de dirección, $\vec{u}$ variará de dirección pero - no de módulo. La indicatriz que describe el extremo de/ $\vec{u}$ es una circunferencia de/ radio unidad ($\vec{u}$ no cambia nunca de módulo, pero si lo hará en/ dirección y sentido).



$$\vec{v} = \vec{v}(t)$$

$$\vec{v} = v.\vec{u}(t)$$

Si derivamos respecto a t

$$\vec{v}' = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(v\vec{u})}{dt} = \frac{dv}{dt}\vec{u} + v\frac{d\vec{u}}{dt}$$

Vamos a estudiar los dos sumandos:

1)

$\frac{dv}{dt}\ \vec{u} \implies$

a) Tiene de módulo $\frac{dv}{dt}$

b) Dirección, la de $\vec{u}$ (la de $\vec{v}$)

c) Sentido el de $\vec{u}$ si $\frac{d\vec{v}}{dt} > 0$ y contrario a $\vec{u}$ si $\frac{dv}{dt} < 0$

2) $\frac{d\vec{u}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{u}}{\Delta t} = \frac{du}{dt}\vec{n} = \frac{ds}{dt}\vec{n} = \frac{r\,d\varphi}{dt}\vec{n} = \frac{d\varphi}{dt}\vec{n}$

- En el límite la cuerda tiende a confudirse con el arco - du = ds
- En el límite, la dirección de la cuerda $\Delta\vec{u}$ tiende a confundirse con la dirección de la tangente, luego $\Delta\vec{u}$ vendrá definido en dirección por el unitario según la tangente $\vec{n}$ y éste, es normal al radio de la circunferencia.
- r = 1 . Circunferencia de radio unidad == $r\,d\varphi = d\varphi$

luego $\implies v\,\frac{d\vec{u}}{dt} ==$

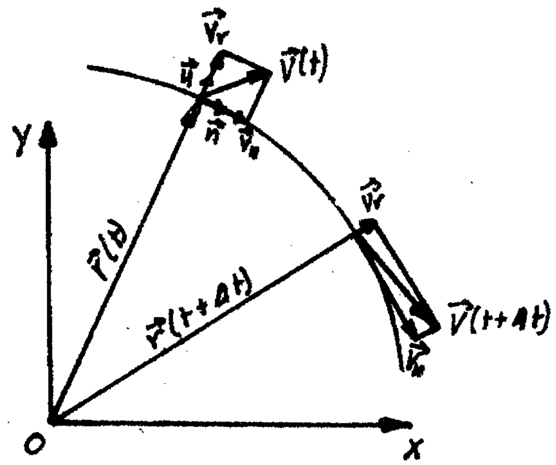
a) Tiene de módulo $v\,\frac{d\varphi}{dt}$

b) Dirección, la de $\vec{n}$

c) Sentido el de $\vec{n}$ si $\frac{d\varphi}{dt} > 0$ y contrario si $\frac{d\varphi}{dt} < 0$

Luego $$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv}{dt}\vec{u} + v\,\frac{d\varphi}{dt}\,\vec{n}$$

$\frac{dv}{t}$ y $v\,\frac{d}{t}$ reciben el nobre de <u>COMPONENTES INTRINSECAS</u> están ligadas a la posición relativa de v siendo independientes del sistema de referencia utilizado.



24.- Hallar la derivada del producto vectorial de $\vec{a}=2t\vec{i}+$ $+t^2\vec{j}$ por $\vec{b}=4t\vec{i}-\vec{j}+t^2\vec{k}$

Método I

$$\vec{a}\wedge\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2t & t^2 & 0 \\ 4t & -1 & t^2 \end{vmatrix} = t^4\vec{i} + (-2t^3)\vec{j} + (-2t-4t^3)\vec{k}$$

Derivando directamente

$$\frac{d(\vec{a}\wedge\vec{b})}{dt} = 4t^3\vec{i} - 6t^2\,\vec{j} - (2+12t^2)\vec{k}$$

Método II

Aplicando la fórmula $\dfrac{d(\vec{a}\wedge\vec{b})}{t} = \vec{a}\wedge\dfrac{d\vec{b}}{dt} + \dfrac{d\vec{a}}{dt}\wedge\vec{b}$

Como deducimos que:

$$\frac{d\vec{b}}{dt} = 4\vec{i} + 2t\vec{k}$$

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = 2\vec{i} + 2t\vec{j}$$

Tenemos

$$\frac{d(\vec{a}\wedge\vec{b})}{dt} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2t & t^2 & o \\ 4 & o & 2t \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 2t & o \\ 4t & -1 & t^2 \end{vmatrix} = \vec{i}(4t^3) + \vec{j}(-6t^2) + $$
$$+ \vec{k}(-12t^2 - 2)$$

25.- Si el vector $\vec{A}$ es función del tiempo, calcular el valor de la derivada de $\frac{d\vec{A}}{dt} \wedge \frac{d^2\vec{A}}{dt^2} \wedge \frac{d^3\vec{A}}{dt^3}$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{A}}{dt} \wedge \frac{d^2\vec{A}}{dt^2} \wedge \frac{d^3\vec{A}}{dt^3}\right) = \cancel{\frac{d^2\vec{A}}{dt^2} \wedge \frac{d^2\vec{A}}{dt^2} \wedge \frac{d^3\vec{A}}{dt^3}} +$$

$$+ \cancel{\frac{d\vec{A}}{dt} \wedge \frac{d^3\vec{A}}{dt^3} \wedge \frac{d^3\vec{A}}{dt^3}} + \frac{d\vec{A}}{dt} \quad \frac{d^2\vec{A}}{dt^2} \quad \frac{d^4\vec{A}}{dt^4}$$

Se simplifica donde tengamos productos vectoriales - de vectores paralelos.

26.- Dado el vector $\vec{a} = 3\vec{i} + 2t\vec{j} + 4t^2\,\vec{k}$. Hallar el valor de

$$\vec{a} \wedge \left(\frac{d\vec{a}}{dt} \wedge \frac{d^2\vec{a}}{dt^2}\right)$$

$$A = \vec{a} \wedge \left(\frac{d\vec{a}}{dt} \wedge \frac{d^2\vec{a}}{dt^2}\right) = \frac{d\vec{a}}{dt}\left(\vec{a} \cdot \frac{d^2\vec{a}}{dt^2}\right) - \frac{d^2\vec{a}}{dt^2}\left(\frac{d\vec{a}}{dt} \cdot \vec{a}\right)$$

$$\vec{a} = 3\vec{i} + 2t\vec{j} + 4t^2\,\vec{k}$$

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = 2\vec{j} + 8\,t\vec{k}$$

$$\frac{d^2\vec{a}}{dt^2} = 8\,\vec{k}$$

$$\vec{A} = \left[(2\vec{j} + 8t\vec{k})\,(4t^2 \cdot 8)\right] - \left[(8\vec{k})\,(2 \cdot 2t + 4t^2 \cdot 8t)\right] =$$

$$= 64t^2\,\vec{j} + 256t^3\,\vec{k} - 32t\vec{k} - 256t^3\vec{k} = 64t^2\,\vec{j} - 32\,t\vec{k}$$

27.- Dadas las componentes intrínsecas de la derivada del vector $\vec{v} \Rightarrow v_r = \frac{dv}{dt} = a$, y, $v_n = v\,\frac{d\varphi}{dt} = b$, siendo a y b constantes. Si en el instante inicial $v = 3$ y $\psi = 0$. Hallar los valores de v y ψ en un instante t cualquiera.

Tenemos dos ecuaciones diferenciales sencillas que se resuelven integrando

$$\frac{dv}{dt} = a \implies \int_3^v dv = a \int_0^t dt \implies \begin{array}{l} v-3 = at \\ v = at + 3 \end{array}$$

$$v \,\frac{d\psi}{dt} = b \implies \int_0^\psi d\psi = b \int_0^t \frac{dt}{(at+3)} \implies$$

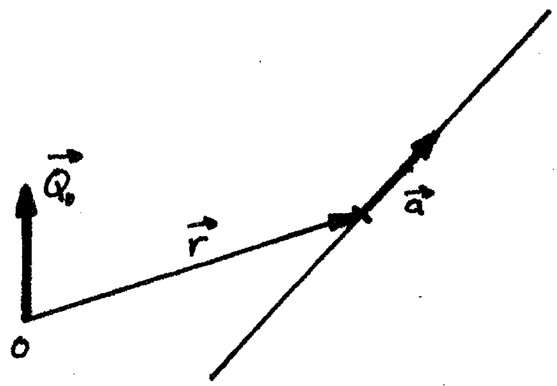
$$\implies \psi = \frac{b}{a} \int_0^t \frac{a\,dt}{(at+3)} = \frac{b}{a} \cdot \ln\left(\frac{at+3}{3}\right)$$

5. VECTORES DESLIZANTES.-

5.1. Momento estático de un vector deslizante respecto de de un punto.

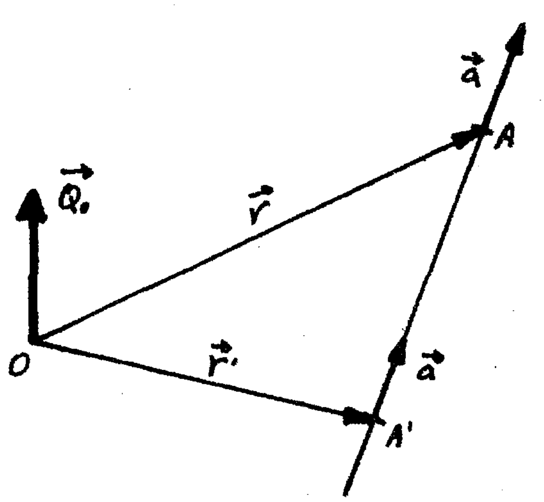
Sea el vector deslizante $\vec{a}$. Se define el momento del vector a respecto del punto O, al vector resultante del producto vectorial.

$$\vec{Q}_o = \vec{r} \wedge \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ r_1 & r_2 & r_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}$$



Por lo tanto perpenducular al plano definido por $\vec{r}$ y $\vec{a}$.
Vector localizado en O, siendo $\vec{r}$ el vector de posición de $\vec{a}$.
O se denomina centro de momentos. El vector de posición $\vec{r}$ tiene su origen en el centro de momentos y su extremo sobre la recta soporte.

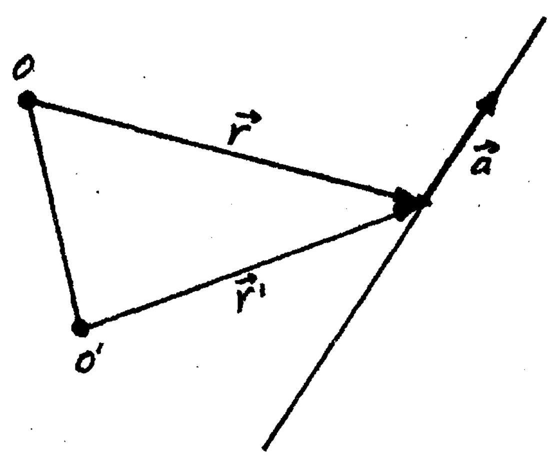
Este momento $\vec{Q}_o$ es independiente de la posición del vector deslizante sobre la recta soporte



En efecto:
$\vec{Q}_o = \vec{r} \wedge \vec{a}$
$\vec{Q}_{o'} = \vec{r}' \wedge \vec{a}$
$\vec{r} = \vec{r}' + \overrightarrow{A'A} \implies$
$\implies \vec{Q}_o = \vec{r} \wedge \vec{a} = (\vec{r}' + \overrightarrow{AA'}) \wedge \vec{a}$
y por la propiedad distributiva del producto vectorial
$\vec{Q}_o = \vec{r}' \wedge \vec{a} + \overrightarrow{AA'} \wedge \vec{a} = \vec{r}' \wedge \vec{a} = \vec{Q}_o'$
c.q.d
ya que $\overrightarrow{AA'}$ y $\vec{a}$ son vectores paralelos, luego se verifica $\implies$

$$\Longrightarrow \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ r_1 & r_2 & r_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ r_1 & r_2 & r_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}$$

5.2. Teorema del cambio de origen de momentos



Vamos a hallar el momento de/ un vector deslizante a respecto a 0 y 0′

$\vec{Q}_o = \vec{r} \wedge \vec{a}$

$\vec{Q}_o' = \vec{r}' \wedge \vec{a}$

$\vec{r}' = \overrightarrow{0'0} + \vec{r} \Longrightarrow \vec{Q}_{o'} = (\overrightarrow{0'0} + \vec{r}) \wedge \vec{a} =$

$= \overrightarrow{0'0} \wedge \vec{a} + \vec{r} \wedge \vec{a}$ luego

$\vec{Q}_{o'} = \overrightarrow{0'0} \wedge \vec{a} + \vec{Q}_o$ (v)

igualmente $\vec{Q}_o = \vec{r} \wedge \vec{a} = (\vec{r}' - \overrightarrow{o'o}) \wedge \vec{a} = (\vec{r}' + \overrightarrow{00'}) \wedge \vec{a} =$

$= \vec{r}' \wedge \vec{a} + \overrightarrow{00'} \wedge \vec{a}$

luego $\underline{\vec{Q}_o = \vec{Q}_{o'} + \overrightarrow{00'} \wedge \vec{a}}$

que coninciden con (v) si despejamos $\vec{Q}_o$.

El Teorema del cambio org. momentos dice que $\vec{Q}_o$ momento de $\vec{a}$ respecto de 0 , es igual a $\vec{Q}_o$′momento de $\vec{a}$ respecto de 0′, más el momento de $\vec{a}$ aplicado en 0′, $(\overrightarrow{00'} \wedge \vec{a})$

Casos en que $\vec{Q}_o = \vec{Q}_{o'}$

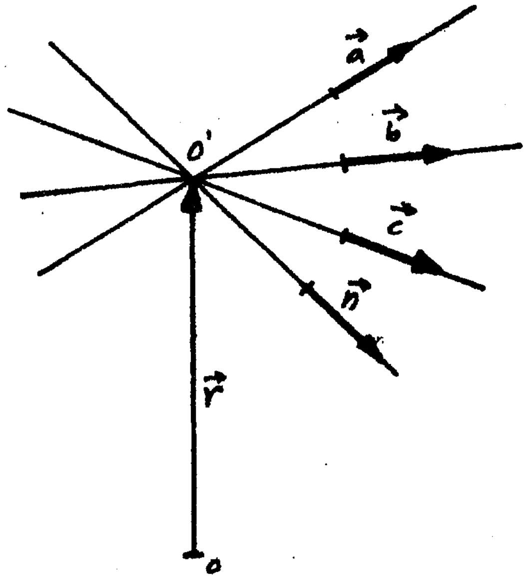
a) Cuando $\overrightarrow{00'}$ es paralelo a $\vec{a} \Longrightarrow \overrightarrow{00'} \wedge \vec{a} = 0 \Longrightarrow \vec{Q}_o = \vec{Q}_{o'}$

b) Cuando 0 y 0′coinciden

5.3. Teorema de Varignon

Dados varios vectores deslizantes $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, ...,$\vec{n}$ cuyas rectas soportes concurren en el punto 0′la resultante de de sus momentos respecto del punto O es igual al momento/ de la resultante de dichos - vectores (Composición que so lo puede efectuarse directamente en O)

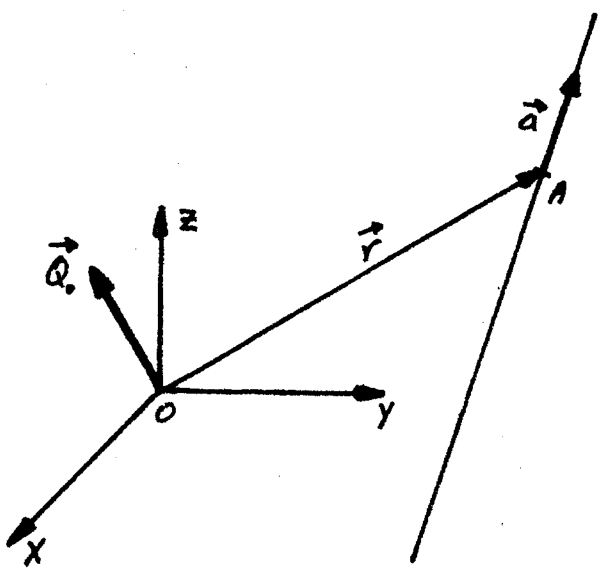
$\vec{Q}_o = \vec{Q}a_o + \vec{Q}b_o + \vec{Q}c_o + \ldots +$
$+ \vec{Qn}_o =$
$= \vec{r} \wedge \vec{a} + \vec{r} \wedge \vec{b} + \vec{r} \wedge \vec{c} + \ldots +$
$\vec{r} \wedge \vec{n}$



que por la propiedad distributiva del producto vectorial puede convertirse en $\vec{Q}_o = \vec{r} \wedge (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \ldots + \vec{n}) = \vec{r} \wedge \vec{R}$ c.q.d.

PROBLEMAS

28.- Hallar el momento en el origen del vector deslizante $\vec{a} = 3\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$, cuya recta soporte pase por el punto A (1, 1, 2)



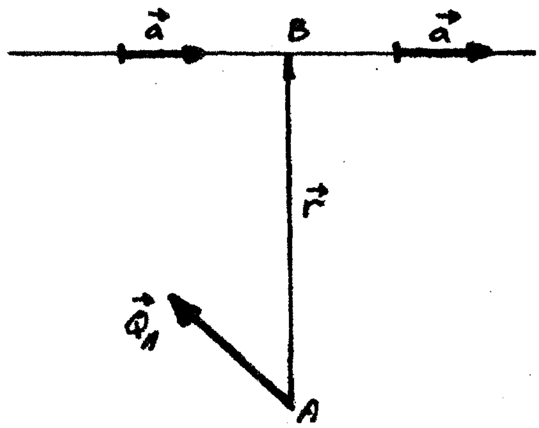
La fórmula del momento es

$$\vec{Q}_o = \vec{r} \wedge \vec{a}$$

donde $\vec{r}$ es un vector que va/ desde el centro de momento O a un punto cualquiera de la/ recta soporte del vector deslizante $\vec{a}$; $\vec{r} = \vec{A} = \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$ Introduciendo valores en la/ expresión analítica del producto vectorial, tenemos

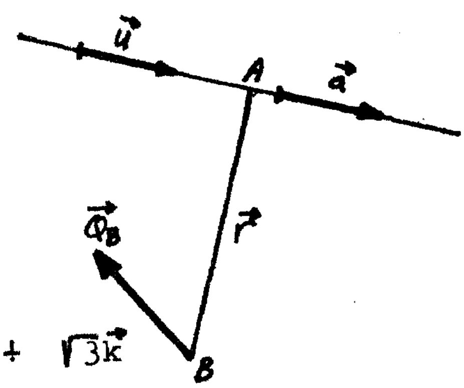
$$\vec{Q}_o = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i}(1+2) + \vec{j}(6-1) + \vec{k}(-1-3) = 3\vec{i} + 5\vec{j} - 4\vec{k}$$

29.- Hallar el momento del vector deslizante $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$, cuya recta soporte pase por B(2, 1, 1), en el punto A(1, 2, 0)



$$\vec{Q}_A = \vec{r} \wedge \vec{a} = \vec{AB} \wedge \vec{a}$$
$$\vec{r} = \vec{AB} = \vec{B} - \vec{A} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$$
$$\vec{Q}_A = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} =$$
$$= \vec{i}(3-2) + \vec{j}(1+3) + \vec{k}(2+1) =$$
$$= \vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{k}$$

30.- Dado el vector deslizante $\vec{a}$, de módulo 2, cuya recta soporte tiene la dirección del unitario $\vec{u} = (1/2)\vec{i} + (\sqrt{3}/2)\vec{j}$ y pasa por el punto A(2, 1, 1) calcular el momento en el punto B(110).



$$\vec{Q}_B = \vec{r} \wedge \vec{a} = \vec{BA} \wedge \vec{a}$$
$$\vec{BA} = \vec{A} - \vec{B} = \vec{i} + \vec{k}$$
$$\vec{a} = a \cdot \vec{u} = 2\left(\frac{1}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\vec{j} =$$
$$= \vec{i} + \sqrt{3}\vec{j}$$
$$\vec{Q} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -\sqrt{3}\vec{i} + \vec{j} + \sqrt{3}\vec{k}$$

31.- Dado el vector deslizante $\vec{AB}$, por su origen y extremo, en un instante dado, A(1, 1, 1) y B(2, 2, 1), hallar su momento en el origen

$$\vec{Q}_o = \vec{r} \wedge \vec{a} = \vec{OA} \wedge \vec{a} = \vec{OB} \wedge \vec{a}$$

El valor del momento es independiente del punto que/ consideramos sobre la recta soporte

$$\vec{OA} = \vec{A} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$$
$$\vec{OB} = \vec{B} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$$
$$\vec{a} = \vec{AB} = \vec{B}-\vec{A} = \vec{i} + \vec{j}$$

Considerando que $\vec{a}$ tiene su origen en A

$$\vec{Q}_A = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\vec{i} + \vec{j}$$

Considerando que tiene su origen en B

$$\vec{Q}_B = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\vec{i} + \vec{j}$$

32.- Nos dan el módulo del vector deslizante $\vec{b}$ cuyo valor es $|\vec{b}| = 2$, según la dirección $\vec{AB}$ donde: A(0,1,2) y B(1,2,1). Hallar el momento de $\vec{b}$ en C(0,1,1).

Conozcamos dos puntos de la recta soporte, A y B, - podemos emplear cualquiera de los dos para calcular el momento en C $\Longrightarrow$

$$\vec{Q}_c = \vec{r} \wedge \vec{b} = \vec{CA} \wedge \vec{b} = \vec{CB} \wedge \vec{b}$$

de la definición de vector unitario tenemos

$$\vec{b} = |\vec{b}| \cdot \vec{u} = |\vec{b}| \frac{\vec{AB}}{|\vec{AB}|}$$

Datos conocidos

$$|\vec{b}| = 2$$
$$\vec{AB} = \vec{B} - \vec{A} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k} \qquad \Longrightarrow \qquad \vec{b} = 2 \left(\frac{\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}}{3}\right)$$
$$|\vec{AB}| = \sqrt{3}$$

Ahora calculamos el valor del vector de posición

$$\vec{CA} = \vec{A} - \vec{C} = \vec{K} \Longleftarrow \text{Empleando A}$$

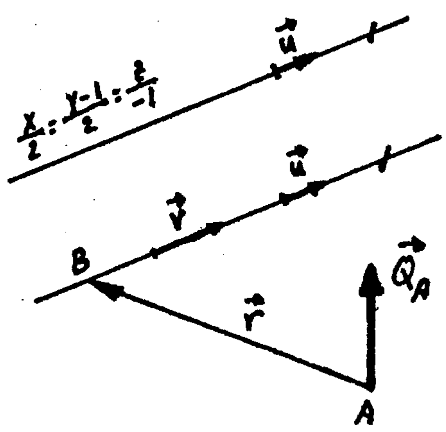
$$\vec{CB} = \vec{B} - \vec{C} = \vec{i} + \vec{j} \Longleftarrow \text{Empleando B}$$

Tenemos pues dos caminos

$$\vec{Q}_c = \vec{CA} \wedge \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{2}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{3}} \end{vmatrix} = \frac{2}{\sqrt{3}} (-\vec{i} + \vec{j}) \text{ o bien}$$

$$\vec{Q}_c = \vec{CB} \wedge \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ \frac{2}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{3}} \end{vmatrix} = - \frac{2}{\sqrt{3}} \vec{i} + \frac{2}{\sqrt{3}} \vec{j}$$

33.- Dada la dirección de un vector deslizante de módulo/ 3 por la ecuación $\frac{x}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{-1}$, si su recta/ soporte pasa por el punto B(2,-1,-1). Calcular el momento de dicho vector en A(2,-2,-2)



$$\vec{Q}_A = \vec{r} \wedge \vec{v} = \vec{AB} \wedge \vec{v}$$

$$\vec{AB} = \vec{B} - \vec{A} = \vec{j} + \vec{k}$$

$$\vec{u} = \frac{2\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}}{\sqrt{2^2+2^2+(-1)^2}} =$$

$$= \frac{2}{3} \vec{i} + \frac{2}{3} \vec{j} - \frac{1}{3} \vec{k}$$

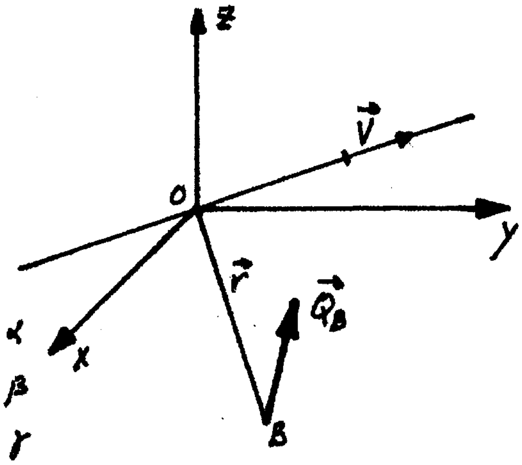
$$\vec{v} = |\vec{v}| . \vec{u} = 3.\vec{u} = 2\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$$

$$\vec{Q}_B = \begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{matrix} =$$

$$= \vec{i}(-1-2) + \vec{j}(2) + \vec{k}(-2) = -3\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$$

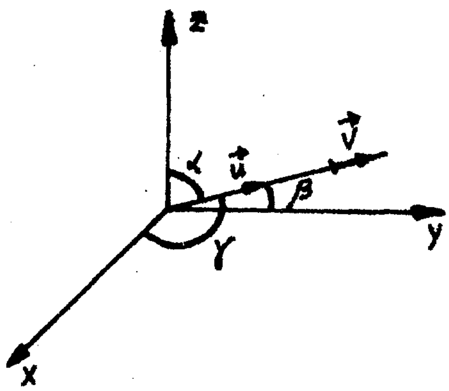
34.- Tenemos un vector deslizante de módulo 3 que pasa - por el origen siendo los cosenos directores de su -

recta soporte directamente proporcionales a: 2,1,-2. Se pide - hallar el momento de dicho vector en B(1,1,0)



$\vec{u} = u_1\ \vec{i} + u_2\ \vec{j} + u_3\ \vec{k}$

Una dirección dada formará unos angulos α, β, γ con - los ejes OX, OY, OZ



$u_1 = |\vec{u}| \cos\alpha$

$u_2 = |\vec{u}| \cos\beta$

$u_3 = |\vec{u}| \cos\gamma$

$\cos\alpha$, $\cos\beta$ y $\cos\gamma$ se llaman cosenos directores de $\vec{u}$ y nos dan las proyec - ciones de $\vec{u}$ (o componentes) sobre los/ ejes o togonales.

Despejando $\vec{u} \Longrightarrow |\vec{u}| = \dfrac{u_1}{\cos\alpha} = \dfrac{u_2}{\cos\beta} = \dfrac{u_3}{\cos\gamma}$

Introduciendo la condición de proporcionalidad

$$\frac{u_1}{2} = \frac{u_2}{1} = \frac{u_3}{-2} \quad (1)\ (2)$$

Da dos ecuaciones, pero tenemos tres incógnitas (u_1, u_2, u_3) necesitamos otra - ecuación.

$$|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}\ (3) \Longrightarrow 1 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2$$

$$(1)\ (2) \Longrightarrow \begin{cases} 2u_2 = -u_3 \\ u_1 = 2u_2 \end{cases}$$

(3) $1 = (2u_1)^2 + u_2^2 + (-2u_2)^2 \Longrightarrow 3u_2 = 1$. Obtenemos - así las componentes del unitario $\Longrightarrow$ $\begin{cases} u_2 = 1/3 \\ u_3 = -2/3 \\ u_1 = 2/3 \end{cases}$ de las que sacamos el valor de $\vec{u} \Rightarrow \vec{u} = 1/3\ (2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k})$

luego $\vec{V} = |\vec{V}|.\vec{u} = 2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$

$$\vec{Q}_B = \vec{r}\wedge\vec{v} = \vec{BO}\wedge\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$$

35.- Calcular el vector deslizante $\vec{v}$ que pasa por el punto A(2,1,1) y que genera en B(1,0,0) y C(1,1,1) los/ momentos respectivos $\vec{Q}_B = -2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ y $\vec{Q}_c = 2\vec{k}$

$$\vec{Q}_B = \vec{BA}\wedge\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = (v_3-v_2)\vec{i} + (v_1-v_3)\vec{j} + + v_2 - v_1)\vec{k} =$$

$$= -2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$$

$$\vec{BA} = \vec{A}-\vec{B} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$$

Para que se verifique la igualdad vectorial tendrán que igualarse las componentes

$v_3 - v_2 = -2$ (1)

$v_1 - v_3 = 1$ (2)

$v_2 - v_1 = 1$ (3)

(3) $\Rightarrow V_2 = 1 + V_1$

(3) en (1) $\Rightarrow v_3 - (1 + v_1) = -2 \Rightarrow$

$v_3 - v_1 = -1 \Rightarrow v_1 - v_3 = 1$

de (1) y (3) obtenemos una ecuación combinación lineal de (2) luego el/ sistema no está determinado.

Necesitamos más ecuaciones, usamos las siguientes

$$\vec{Q}_c = \vec{CA}\wedge\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = v_2\,\vec{k} = 2\vec{k}$$

$$\vec{CA} = \vec{A} - \vec{C} = \vec{i}$$

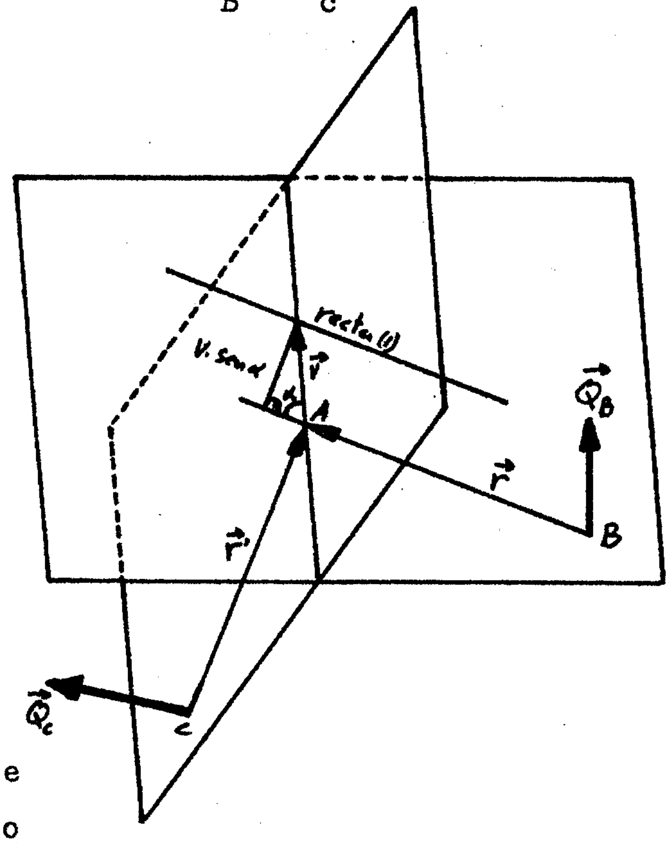
Igualando las componentes

$v_2 = 2$

(1) $\Rightarrow v_3 = 0$ $\qquad \vec{v} = \vec{i} + 2\vec{j}$

(3) $\Rightarrow v_1 = 1$

<u>Gráficamente</u>: $\vec{v}$ será perpendicular a $\vec{Q}_B$ y $\vec{Q}_c$, luego estrá en/ la intersección de los planos perpendiculares a ambos. Si solo conociéramos $\vec{Q}_B$, lo único/ que sabríamos es que $\vec{v}$ está en el plano perpendicular a $\vec{Q}_B$ por B, y que dado que Q_B = - Constante $\vec{Q}_B = |\vec{r} \wedge \vec{v}| = |\vec{r}|\cdot|\vec{v}|\cdot \text{sen}\alpha \Rightarrow |\vec{v}|\cdot\text{sen}\alpha = \frac{Q_B}{|\vec{r}|}$ = Cte el lugar/ geométrico del extremo de $\vec{v}$ será la recta (1) que verifique que $|\vec{v}|.\text{sen}\alpha$ = Cte



Tendríamos infinitas soluciones, por lo que necesitamos introducir más condiciones $\Rightarrow \vec{Q}_c$.
El corte de la recta anterior con la obtenida mediante la intersección de los dos planos perpendiculares nos da el lugar geómetrico del extremo de $\vec{v}$.

36.- Hallar el vector deslizante $\vec{a}$ según los datos siguientes a) Genera en el punto O (1,1,2) el vector $\vec{Q}_o = 2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$

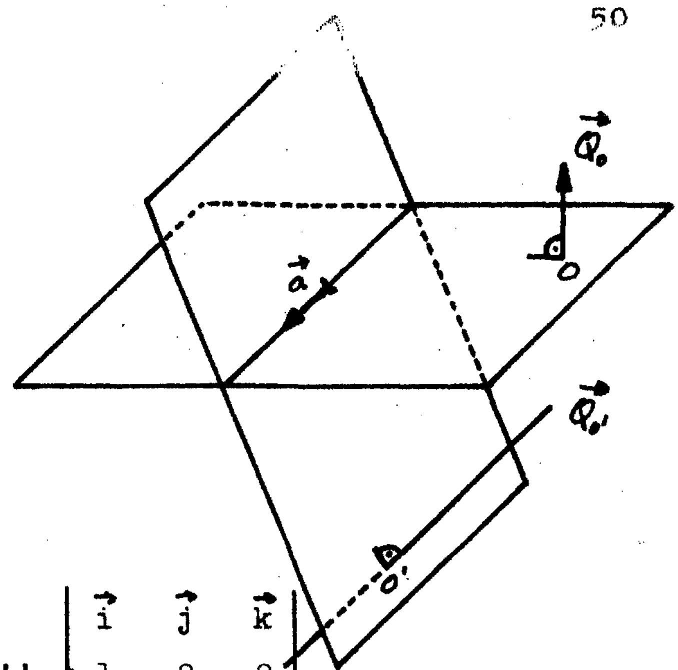
b) Genera en el punto O'(2,-1,0) un momento $\vec{Q}_{o'}$, cuya/ dirección es $\begin{cases} x = 2z \\ y = z-1 \end{cases}$

Aplicaremos el teorema del cambio de origen de momentos

$$\vec{Q}_{o'} = \vec{Q}_o + \overrightarrow{O'O} \wedge \vec{a} \ (0)$$

Donde $\Rightarrow$

$$\vec{a} = a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k}$$



$\overrightarrow{O'O} = -\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$

$$\frac{x}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{1}$$

dirección de $\vec{Q}_{o'}$

$== \vec{Q}_{o'} = \lambda(2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$

Aplicando (0)

$$(2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})\lambda = 2\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k} ++ \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & 2 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}$$

Sistema de 3 ecuaciones con 4 incógnitas

$$\left.\begin{array}{ll} 2\lambda = 1.2 + 2a_3 - 2a_2 & (1) \\ \lambda = -2 + 2a_1 + a_3 & (2) \\ \lambda = 1 - a_2 - 2a_1 & (3) \end{array}\right\} \begin{array}{l} \lambda - 1 = a_3 - a_2 \\ \lambda + 2 = 2a_1 + a_3 \\ \lambda - 1 = -2_2 - 2a_1 \end{array}$$

$$(1)(3) \Rightarrow a_3 = -2a_1 \quad (I)$$
$$(2) \Rightarrow \lambda + 2 = 2a_1 - 2a_1$$
$$\lambda = -2 \quad (II)$$

$\vec{Q}_{o'} = (2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})(-2) = -4\vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k}$

Añadamos otra ecuación

$\vec{Q}_{o'} \perp \vec{a} = 0 \Rightarrow (-2)\left[2a_1 + a_2 + a_3\right] = 0 \quad (III)$

$(I)\ (III) \Rightarrow a_2 = 0 \quad (II)(I) \Rightarrow a_3 = -3 \quad (I) \Rightarrow a_1\ 3/2$

$\vec{Q}_o \perp \vec{a} = 0 \Rightarrow 2a_1 - 2a_2 + a_3 = 0 =: (I) \Rightarrow a_2 = 0$

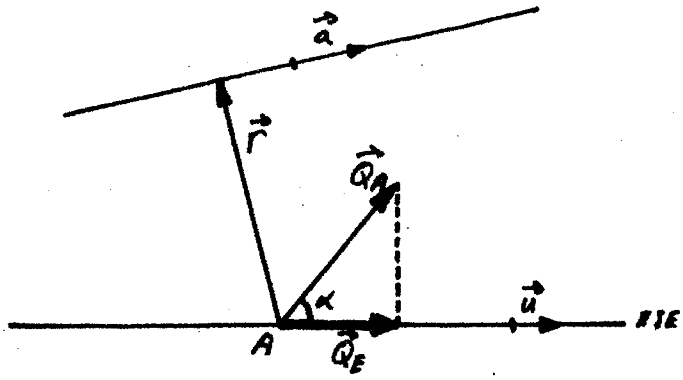
$$\vec{a} = \frac{3}{2}\vec{i} - 3\vec{k}$$

5.4. <u>Momento respecto a un eje</u>

Momento respecto de un eje (o momento áxico, o momento axial) se define como la proyección sobre un eje del momento de un vector deslizante resoecto de un punto cualquiera del eje.

Para hallar la/ proyección de $\vec{Q}_A$ sobre el eje, hacemos el siguiente producto escalar

$\vec{Q}_A \cdot \vec{u} = |\vec{Q}_A| \cos\alpha = Q_{eje}$



ya que el producto escalar de un vector por el unitario según una dirección dada, nos daba la proyecciǹn de dicho/ vector sobre la dirección del unitario.

"l definir el momento respecto a un eje suponemos que la proyección del momento vale lo mismo cualquiera que sea el/ punto elegido.

Vamos a demostrarlo: Sean A y B dos puntos del eje - Según el Teorema del cambio de origen de momentos.

$$\vec{Q}_A = \vec{Q}_B + \vec{AB} \wedge \vec{a}$$

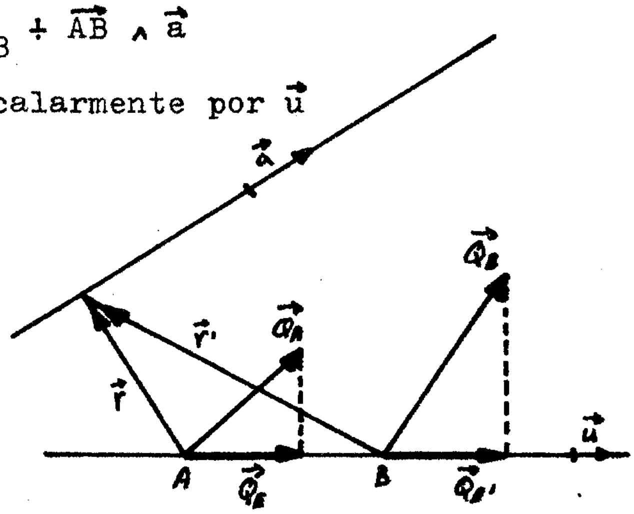
multiplicando escalarmente por $\vec{u}$

$\vec{Q}_A \cdot \vec{u} = \vec{Q}_B \cdot \vec{u} + \vec{AB} \wedge \vec{a} . \vec{u}$

El producto mixto $\vec{AB} \wedge \vec{a} . \vec{u}$ es nulo ya que $\vec{u}$ es paralelo a $\vec{AB}$, luego

$|\vec{Q}_E| = |\vec{Q}_{E'}|$ C.q.d. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ luego es un vector - deslizante.



El momento axial es un vector deslizante $\vec{Q}_E$ (sobre - el eje):

1) De módulo $|\vec{Q}_E| = \vec{Q}_A \cdot \vec{u}$
2) Dirección la de $\vec{u}$
3) y sentido el de $\vec{u}$ si $\vec{Q}_A > 0$ y el contrario si

$\vec{Q}_A < 0$; $\vec{Q}_E = |\vec{Q}_E|\,\vec{u}$ == (Si el sentido de $\vec{u}$ coincide con el/ de $\vec{Q}_A$)

Se anula cuando:

a) $\vec{Q}_A$ sea perpendicular al eje (esto ocurre cuando el vector deslizante y el eje son paralelos)

b) Cuando $\vec{Q}_A = 0$ (el vector deslizante corta el eje o se anula)

Expresión analítica

$$\vec{Q}_A = \vec{r} \wedge \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ r_1 & r_2 & r_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = (r_2\, a_3 - r_3\, a_2)\vec{i} + (r_3\, a_1 - r_1\, a_3)\vec{j} + (r_1\, a_2 - r_2\, a_1)\vec{k}$$

$$|\vec{Q}_E| = \vec{Q}_A \cdot \vec{u} = (r_2 a_3 - r_3 a_2)u_1 + (r_3 a_1 - r_1 a_3)u_2 + (r_1 a_2 - r_2 a_1)u_3 =$$

$$u_1 \cdot \begin{vmatrix} r_2 & r_3 \\ a_2 & a_3 \end{vmatrix} + u_2 \begin{vmatrix} r_3 & r_1 \\ a_3 & a_1 \end{vmatrix} + u_3 \begin{vmatrix} r_1 & r_2 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} = u_1 \begin{vmatrix} r_2 & r_3 \\ a_2 & a_3 \end{vmatrix} - u_2 \begin{vmatrix} r_3 & r_1 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} + u_3 \begin{vmatrix} r_1 & r_2 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix}$$

Coincide con el desarrollo del determinante

$$|\vec{Q}_E| = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ r_1 & r_2 & r_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}$$

El módulo del momento áxico respecto al eje OX será:

$$|\vec{Q}_{EX}| = \vec{Q}_A \cdot \vec{i} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ r_1 & r_2 & r_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = (r_2\, a_3 - r_3\, a_2)$$

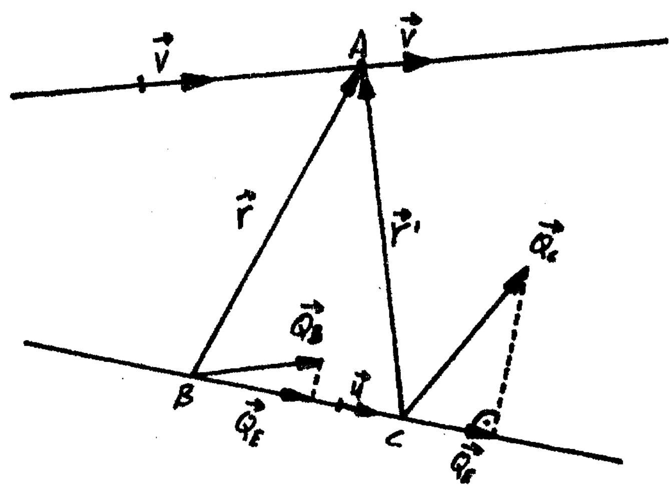
Respecto a OY y OZ

$$|\vec{Q}_{EY}| = \vec{QA} \cdot \vec{j} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ r_1 & r_2 & r_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = (r_3\, a_1 - r_1\, a_3)$$

$$\vec{Q}_{EZ} = \vec{Q}_A \cdot \vec{k} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ r_1 & r_2 & r_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = (r_1\, a_2 - r_2\, a_1)$$

37.- Dado el vector deslizante $\vec{v} = 2\vec{i} + \vec{j}$, cuya recta soporte pasa por el punto A(2,1,1). Hallar el momento/ de dicho vector respecto al eje que pasa por los puntos B(1,1,1) y C(1,2,0).

Hallaremos $\vec{Q}_B$ o $\vec{Q}_C$ y su proyección sobre el eje BC nos dará el valor de $\vec{Q}_{EJE}$



$$\vec{Q}_B = \vec{r} \wedge \vec{v} = \vec{BA} \wedge \vec{v} =$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \vec{k}$$

$$\vec{BA} = \vec{A} - \vec{B} = \vec{i}$$

$$\vec{Q}_c = \vec{r} \wedge \vec{v} = \vec{CA} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$$

$$\vec{CA} = \vec{A} - \vec{C} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$$

El módulo del momento áxico valdrá

$$|\vec{Q}_E| = \vec{Q}_B \cdot \vec{u}$$

o bien $|\vec{Q}_E| = \vec{Q}_c \cdot \vec{u}$

$\vec{BC} = \vec{u}$ $|\vec{BC}| = \vec{C} - \vec{B} = \vec{j}-\vec{k}$

$\vec{BC} = \sqrt{2}$

$$\vec{u} = \frac{\vec{BC}}{|\vec{BC}|} = \frac{\vec{j} - \vec{k}}{\sqrt{2}}$$

$$|\vec{Q}_E| = \vec{Q}_B \cdot \vec{u} = 1.(-1/\sqrt{2}) = \left|(-\sqrt{2}/2)\right|$$

$\vec{Q}_E = |\vec{Q}_E| \cdot \vec{u} = (\sqrt{2}/2) \cdot \left[\frac{\vec{j} - \vec{k}}{2}\right] = \frac{1}{2}\vec{j} - \frac{1}{2}\vec{k}$

$|\vec{Q}_E| = \vec{Q}_c \cdot \vec{u} = 2. \left[(1/\sqrt{2}) - 3\,(1-/\sqrt{2})\right] = \left|(-\sqrt{2}/2\,)\right|$ ya que los módulos son positivos, hemos de tomar valores absolutos.

38.- Dado un vector deslizante de módulo 3 cuya recta soporte tiene la dirección del vector $\vec{u} = (1/3)\vec{i} + (2/3)\vec{j} + (2/3)\vec{k}$ y pasa por el punto A(1,1,2). Calcular el momento axial sobre el eje que pasa por el/ punto B(1,1,1) y cuya dirección viene dada por $\vec{u}' = (\sqrt{2}/2)\vec{i} + (\sqrt{2}/2)\vec{j}$

Primeramente hallaremos el momento estático en un punto del eje.

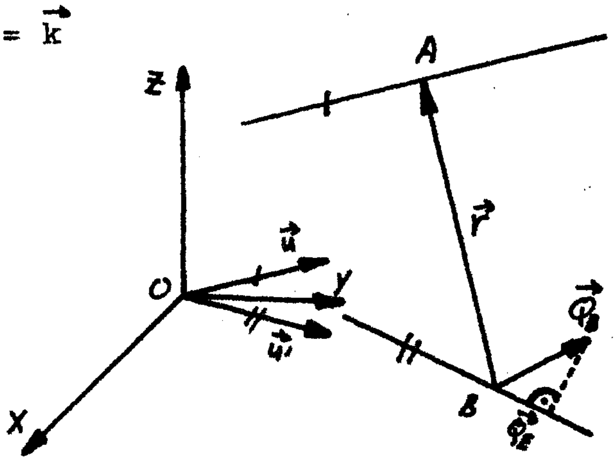
$$\vec{Q}_B = \vec{r} \wedge \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -2\vec{i} + \vec{j} \quad \text{Donde } \vec{a} = |\vec{a}| . \vec{u} = 3\left[(1/3)\vec{i} + (2/3)\vec{j} + (2/3)\vec{k}\right] = \vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$$

y $\vec{r} = \vec{BA} = \vec{A} - \vec{B} = \vec{k}$

Proyectando este momento sobre el eje tenemos:

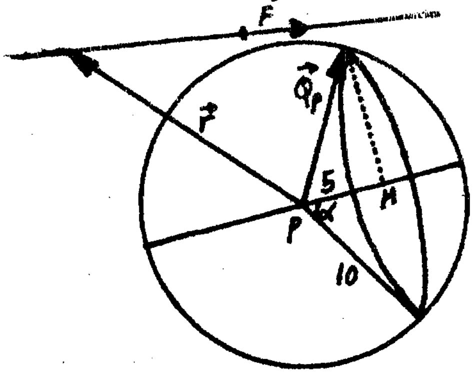
$\vec{Q}_B \cdot \vec{u}' = |\vec{Q}_E| =$
$= (-2\vec{i} + \vec{j}) \cdot \left[(\sqrt{2}/2)\vec{i} + (\sqrt{2}/2)\vec{j}\right] = -\sqrt{2} + (\sqrt{2}/2) =$
$= |-\sqrt{2}/2|$

$\vec{Q}_E = |\vec{Q}_E| \cdot \vec{u}' =$
$= (\sqrt{2}/2)\left[(\sqrt{2}/2)\vec{i} + (\sqrt{2}/2)\vec{j}\right] =$
$= (1/2)\vec{i} + (1/2)\vec{j}$



39.- Si el módulo de $\vec{Q}_p$, momento del vector deslizante $\vec{F}$ en el punto P, vale 10. Hallar el lugar geométrico/ (l.g) del extremo de $\vec{Q}_p$ sabiendo que el momento de $\vec{F}$ respecto de un eje que pasa por P vale 5 y la di -

rección del mismo es fija y conocida



$|\vec{Q}_p| = 10$

Su l.g. es una esféra de radio 10 y centro P.

$|\vec{Q}_E| = |\vec{Q}_P| \cdot |\vec{u}| \cdot \cos\alpha$

$$\cos\alpha = \frac{Q\ \text{eje}}{Q_P} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

$\alpha = 60º$ El l.g. es un cono y la esféra nos determina una circunferencia de radio:

$$r = QP \text{ sen } 60º = 10 \cdot \sqrt{3}/2 = 5.\sqrt{3}$$

40.- Nos dan un vector deslizante $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ cuya recta soporte pasa por el punto B(1,1,0). Calcular el momentoaxial sobre una recta de dirección definida por x = 2z, y = 2z-1, y que pasa por el punto A(0,1'0)

Lo primero que hacemos es calcular el momento estático en un punto conocido del eje.

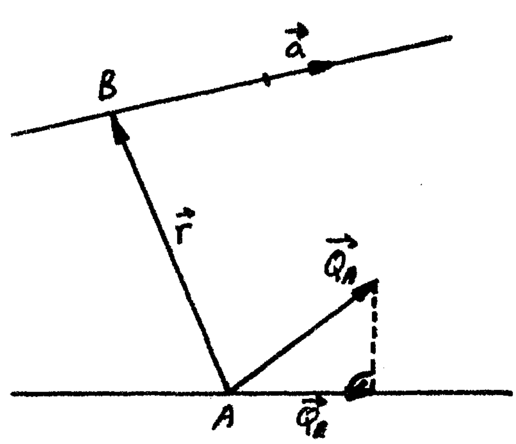
$$\vec{Q}_A = \vec{r} \wedge \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & +1 \end{vmatrix} = -\vec{j} + \vec{k}$$

$\vec{r} = \vec{AB} = \vec{B} - \vec{A} = \vec{i}$

Proyectamos el momento sobre el eje y obtenemos el módulo de $\vec{Q}_E$

$|\vec{Q}_E| = |\vec{Q}_A| \cdot |\vec{u}| \cdot \cos\alpha = \vec{Q}_A \cdot \vec{u}$

$$\left.\begin{aligned} x &= 2z \\ y &= 2z - 1 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow (x/2) = (y+1)/2 = z/1$$



Un vector según esta dirección será $\vec{v} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$

$v = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3$

luego $\vec{u} = \vec{v}/|\vec{v}| =$

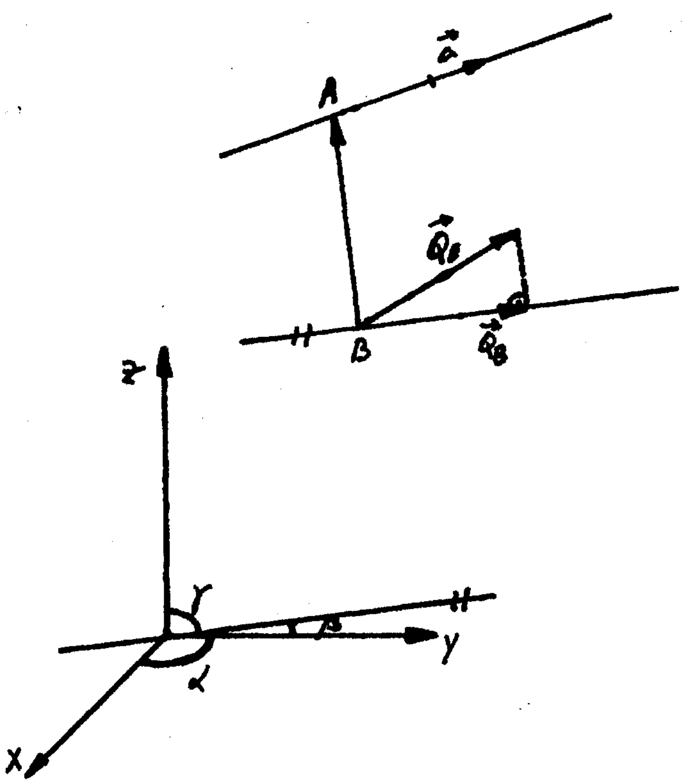
$= (2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k})/3$

$|\vec{Q}_E| = (2/3)\ (-1) + (1/3)1 = \ |-1/3|$

$\vec{Q}_E = |\vec{Q}_E| \cdot \vec{u} = |-1/3| \cdot (1/3)(2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}) = (1/9)(2\vec{i}+2\vec{j} + \vec{k})$

41.- Dado un vector deslizante $\vec{a} = 3\vec{i} - \vec{j}$ cuya recta soporte pasa por el punto A(1,2,0). Calcular el momento de dicho vector respecto al eje que pasa por el punto B(0,1,0) y cuya dirección viene dada por los cosenos directores: $\cos\alpha = \sqrt{2}/2$; $\cos\beta = 0$ y $\cos\gamma = -\sqrt{2}/2$

El vector unitario se podrá expresar en función de sus componentes



$\vec{u} = u_1\ \vec{i} + u_2\ \vec{j} + u_3\ \vec{k}$

Por la definición de cosenos directores

$|\vec{u}| \cdot \cos\alpha = u_1 = \sqrt{2}/2$

$|\vec{u}| \cdot \cos\beta = u_2 = 0$

$|\vec{u}| \cdot \cos\gamma = u_3 = -\sqrt{2}/2$

luego

$\vec{u} = (\sqrt{2}/2)\ (\vec{i} - \vec{k})$

ya tenemos el valor del unitario según la dirección del eje

Hallaremos el momento respecto a un punto cualquiera del eje

Conocemos B, luego$\Longrightarrow$

$$\vec{Q}_B = \vec{r} \wedge \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -4\vec{k}$$

El momento axial es la proyección de dicho momento estático sobre el eje

$$|\vec{Q}_E| = \vec{Q}_B \cdot \vec{u} = -4\left(\frac{-\sqrt{2}}{-2}\right) = 2\cdot\sqrt{2}$$

Vectorialmente:

$$\vec{Q}_E = |\vec{Q}_E|\cdot \vec{u} = 2\cdot\sqrt{2}\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\,(\vec{i}-\vec{k})\right] = 2\vec{i} - 2\vec{k}$$

42.- Dado un vector deslizante de módulo $|\vec{a}| = 3$ cuya dirección presenta unos cosenos directores directamente proporcionales a 1, 2 y 2 y cuya recta soporte pasa por A(1,1,0). Se pide calcular el momento sobre un eje que pasa por B(1,0,1) y cuya dirección presenta unos cosenos directores inversamente proporcionales a 1/3, 1 y 2

Vamos a hallar el unitario según la dirección de a

$$\vec{u} = u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k}$$

$$|\vec{u}|.\cos\alpha = u_1$$
$$|\vec{u}|.\cos\beta = u_2 \qquad |\vec{u}| = \frac{u_1}{\cos\alpha} = \frac{u_2}{\cos\beta} = \frac{u_3}{\cos\gamma} \Longrightarrow$$
$$|\vec{u}|.\cos\gamma = u_3$$

$$\frac{u_1}{1} = \frac{u_2}{2} = \frac{u_3}{2} \qquad 2u_1 = u_2$$
$$u_3 = 2u_1$$
$$1 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 \qquad 1 = 9u_1^2 \Longrightarrow u_1 = 1/3$$
$$u_2 = 2/3 \text{ y } u_3 = 2/3$$

luego:

$$\vec{u} = 1/3\,(\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k})$$
$$\vec{a} = |\vec{a}|.\,\vec{u} = \vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$$

El momento en un punto conocido del eje valdrá $\Longrightarrow$

$$\vec{Q}_B = \vec{r}\wedge\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \vec{i}(-2+2)+\vec{j}(-1)+\vec{k}(-1) =$$
$$= 4\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$$

$$\vec{r} = \vec{BA} = \vec{j} - \vec{k}$$

Para hallar el momento axial, necesitamos el unitario según la dirección del eje $\vec{u}'$

$$|\vec{Q}_E| = \vec{Q}_B \cdot \vec{u}' \quad \text{Tenemos que} \quad \frac{u_1'}{3} = \frac{u_2'}{1} = \frac{u_3'}{1/2}$$

$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 1$$

$$\left.\begin{array}{l} u_1' = 3u_2' \\ u'^1_3 = (1/2)u_2' \\ u'_2\,(9 + 1 + 1/4) = 1 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} u'^2_2 = (41/4)^{-1} \\ u_2^2 = \sqrt{(41/4)^{-1}} = \dfrac{2\sqrt{41}}{41} \\ u_1' = (3 \cdot 2)/\sqrt{41} \\ u_3' = 2/2 \cdot \sqrt{41} \end{array}$$

$$\vec{u}' = 2\left(\frac{3}{\sqrt{41}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{41}}\vec{j} + \frac{1}{2 \cdot \sqrt{41}}\vec{k}\right)$$

$$|\vec{Q}_E| = \vec{Q}_B \cdot \vec{u}' = \frac{21}{\sqrt{41}}$$

$$\vec{Q}_E = |\vec{Q}_E| \cdot \vec{u} = \frac{21}{\sqrt{41}}\left(\frac{6\vec{i}}{\sqrt{41}} + \frac{2}{\sqrt{41}}\vec{j} + \frac{1}{\sqrt{41}}\vec{k}\right) =$$

$$= \frac{126}{41}\vec{i} + \frac{42}{41}\vec{j} + \frac{21}{41}\vec{k}$$

5.5. Sistema de vectores deslizantes equivalentes.

Dos sistemas de vectores deslizantes son equivalentes cuando se puede pasar de uno a otro mediante operaciones invariantes.

Se llaman operaciones invariantes las que no modifican las condiciones físicas del sistema. Son:

a) Sustitución de varios vectores deslizantes cuyas/ rectas soportes se cortan en un punto por el vector suma (vector resultante).

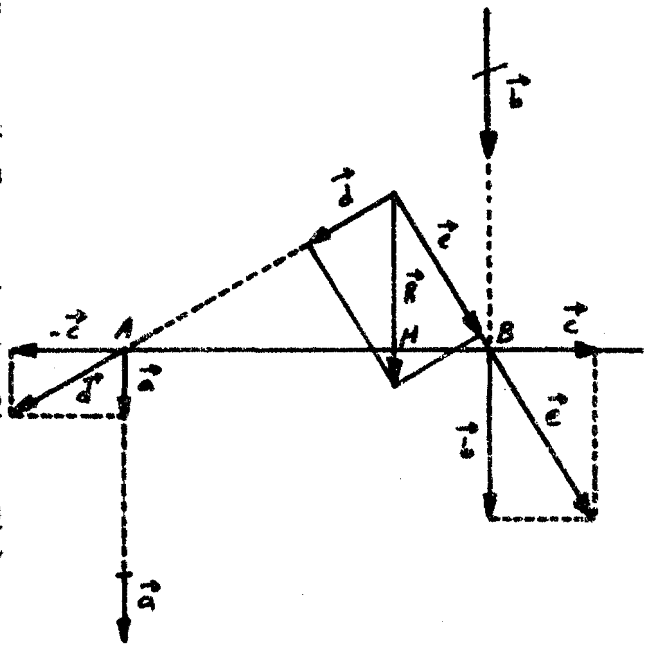
b) Descomposición de un vector en otros vectores coplanarios cuyas rectas soporte se cortan en un punto de la línea de acción del primero.

c) Traslación de un vector a lo largo de su recta soporte.

d) Adición o supresión de vectores opuestos con la misma línea de acción.

43.- Dados dos vectores deslizantes, paralelos y de igual semtido, sustituirlos por un vector $\vec{R}$ resultante mediante operaciones invariantes.

a) Trasladamos $\vec{a}$ y $\vec{b}$ (solo para que nos quede mejor el/ dibujo) según su recta soporte hasta A y B.



b) Sobre la recta AB consideramos los vectores opuestos $\vec{c}$ y $(-\vec{c})$

c) A continuación componemos $(-\vec{c})$ y $\vec{a}$ obteniendo el vector deslizante $\vec{d}$, y $\vec{c}$ y $\vec{b}$ obteniendo $\vec{e}$

d) Trasladamos $\vec{d}$ y $\vec{e}$ hasta que se corten sus líneas de/ acción

e) Componiendo $\vec{d}$ y $\vec{e}$ obtenemos el vector resultante $\vec{R}$ buscado, equivalente al sistema formado por $\vec{a}$ y $\vec{b}$

- En el caso de que $\vec{a}$ y $\vec{b}$ sean perpendiculares a $\vec{AB}$

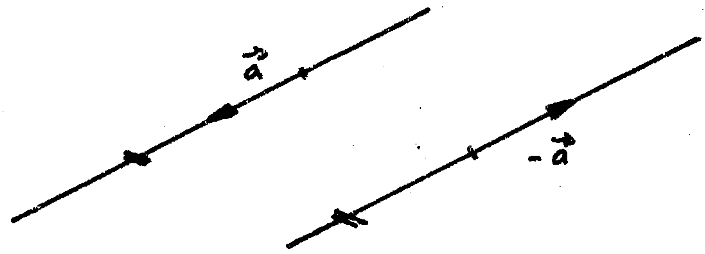
$$\Rightarrow \quad \vec{Q}_M = \vec{MA} \wedge \vec{a} + \vec{MB} \wedge \vec{b} = \vec{MM} \wedge \vec{R} = 0$$

ya que $\vec{R} = \vec{a} + \vec{b}$ pasa por M

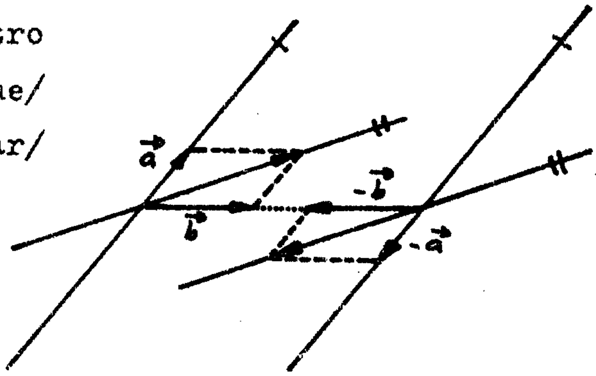
$$Q_M = MA \cdot a - Mb \cdot b = 0 \Rightarrow \frac{MA}{MB} = \frac{b}{a}$$

5.6. Par de vectores.

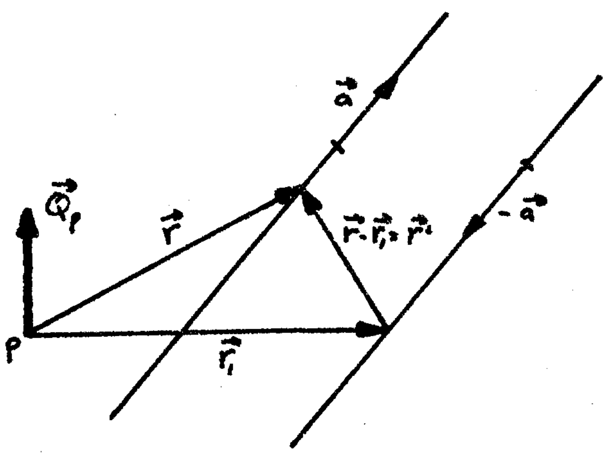
Se define par de vectores al sistema formado por dos vectores deslizantes paralelos de igual módulo y sentido opuestos.



Estos vectores no se pueden reducir por medio de operaciones invariantes a otro vector(resultante), ya que/ siempre obtenemos otro par/ de vectores



Vamos a ver lo que vale el momento resultante de este par en un punto genérico P.



$$\vec{Q}_P = \vec{r} \wedge \vec{a} + \vec{r}_1 \wedge (-\vec{a}) = (\vec{r} - \vec{r}_1) \wedge \vec{a}$$

Según la propiedad distributiva del producto vectorial

$$\vec{r} - \vec{r}_1 = \vec{r}'$$

$$\vec{Q}_P = \vec{r}' \wedge \vec{a}$$

$\vec{Q}_P$ es independiente de P (centro de momentos) luego el momento del par es un vector libre.

44.- Dado el par de vectores definido por $\vec{a} = 3\vec{i} + \vec{j}$, cuya recta soporte pasa por A(1,0,0) y el vector $(-\vec{a})$, cuya recta soporte pasa por B(2,1,1). Hallar el momento del par.

$$\vec{r}\,' = \overrightarrow{BA} = \vec{A} - \vec{B} = -\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$$

$$\vec{Q}_{par} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \vec{i}(+1) + \vec{j}(-3) + \vec{k}\,(-1+3) = $$
$$= +\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$$

El momento del par es un vector libre, para demostrar lo vamos a ver que vale lo mismo en un punto cualquiera, por - ejemplo el origen.

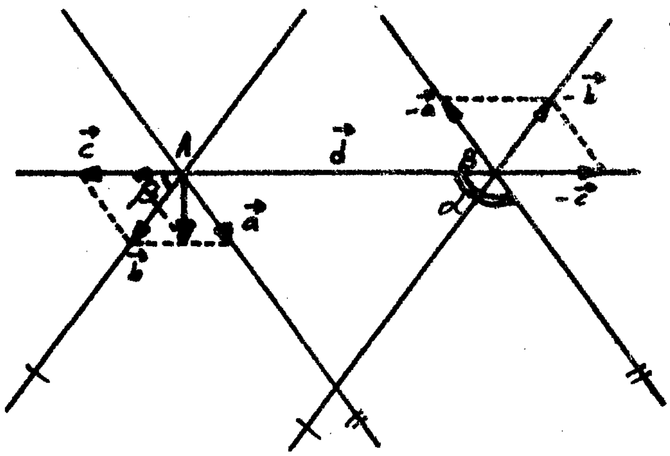
$$\vec{Q}_o = \overrightarrow{OA} \wedge \vec{a} + \overrightarrow{OB} \wedge (-\vec{a}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{K} + \vec{i} + \vec{j}\,(-3) - 2\vec{k} + 3\vec{k} = \vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$$

TEOREMA

Dos pares de vectores deslizantes con el mismo momento son equivalentes.

Tenemos dos pares de vectores coplanarios $(\vec{a}.-\vec{a})$ y - $(\vec{b}\ -\vec{b})$ con el mismo momento resultante $\vec{Q}$



$$\vec{Q} = \vec{d} \wedge \vec{a} = \vec{d} \wedge \vec{b}$$
$$a\,.\,d\,.\text{sen}\,\alpha = b\,.\,d\,.\text{sen}\,\beta$$

Ponemos en la recta $\overrightarrow{AB}$ los vectores opuestos $\vec{c}$ y $-\vec{c}$, el sistema no se altera.

Hacemos que $\vec{c}$ sea tal que la línea de acción de -- $(\vec{a} + \vec{c})$ coincidan con la de $\vec{b}$

El momento resultante vale lo mismo en cualquier punto. Vamos a tomar momentos en B.

$$\text{En B} \Rightarrow \vec{Q} = \vec{Q}_B = \vec{d} \wedge \vec{a} = \vec{d} \wedge (\vec{a} + \vec{c})$$

$$\vec{Q} = \vec{d} \wedge \vec{b}$$

Modularmente: $Q = d \cdot (a + c) \cdot \text{sen}\,\beta$

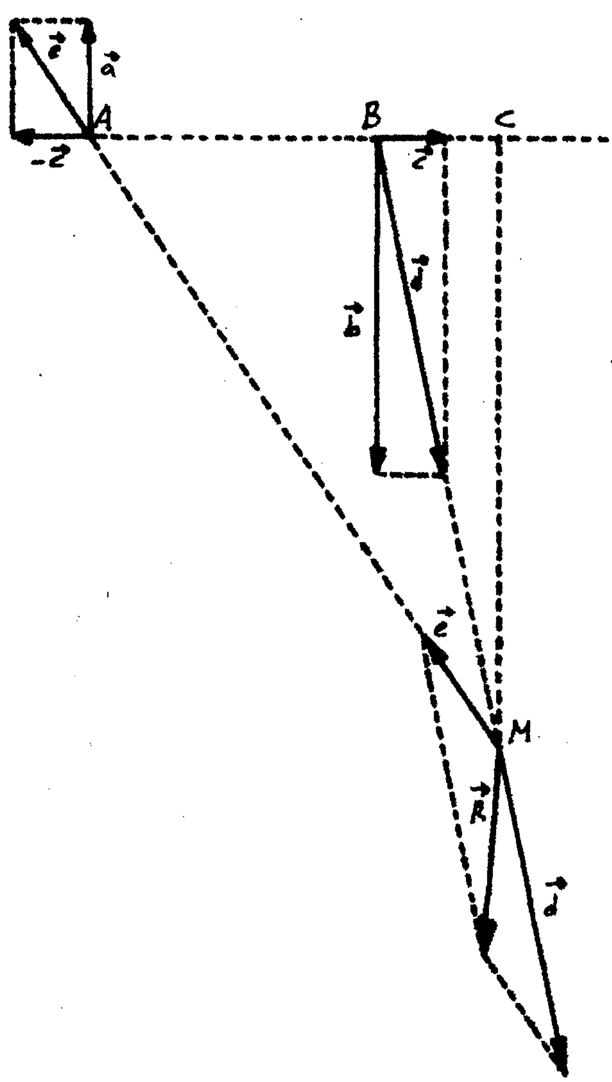
$Q = d \cdot b \cdot \text{sen}\,\beta$

Se verifica la igualdad en dirección y sentido de - b y (a + c).

Se tendrá que verificar la agualdad modular (a + c)= = b, como se deduce de (I) $\Rightarrow$ $d \cdot (a+c) \cdot \text{sen}\,\beta = d \cdot b \cdot \text{sen}\,\beta$ ya que con sumar a $\vec{a},\vec{c}$ y a$(-\vec{a})$, $(-\vec{c})$

$\vec{a}, (-\vec{a}) <> \vec{a}, \vec{c}, (-\vec{a}), (-\vec{c}) <> \vec{b}, (-\vec{b})$ c.q.d.

45.- Dados dos vectores deslizantes paralelos, de distinto módulo y sentido contrario, sustituirlos por otro -- vector, resultante, mediante operadiones invariantes

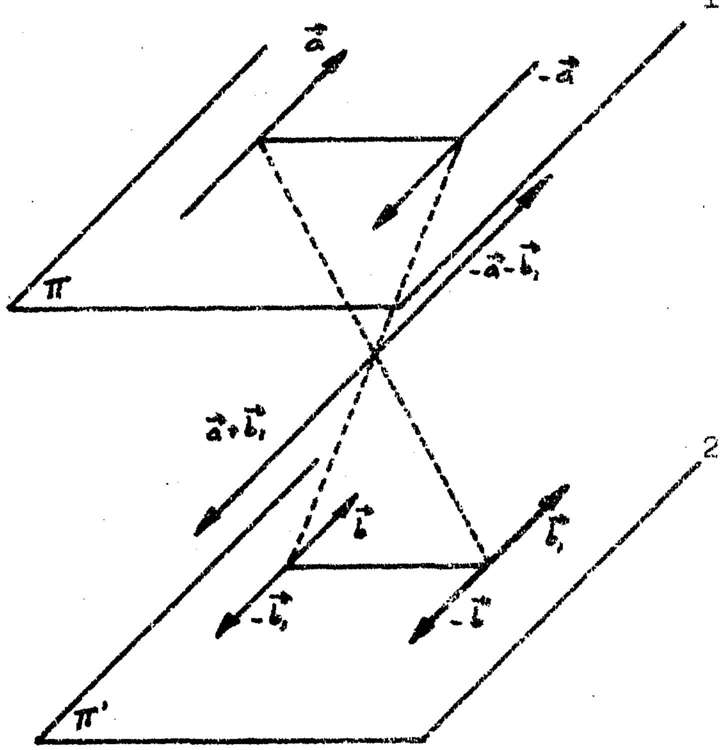


1) Dados $\vec{a}$ y $\vec{b}$
2) Unimos sus origenes A y B y sobre esta recta colocamos a $\vec{c}$ y su opuesto $-\vec{c}$. El sistema no sufre alteración.
3) Componemos $\vec{a}$ y $(-\vec{c})$ y $\vec{b}$ y $\vec{c}$, obteniendo respectivamente los vectores $\vec{e}$ y $\vec{d}$
4) Deslizamos $\vec{d}$ y $\vec{e}$ según - sus rectas soporte hasta donde se corten (Punto M)
5) Componemos $\vec{d}$ y $\vec{e}$ en M, obtenemos el vector resul - tante $\vec{R} = \vec{b} + \vec{a}$
6) Deslizamos $\vec{R}$ hasta el punto C

Si $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son perpendiculares a $\overrightarrow{AC}$, tenemos:

$$\vec{Q}_c = \overrightarrow{CB} \wedge \vec{b} + \overrightarrow{CA} \wedge \vec{a} = 0$$
$$|\vec{Q}_c| = CB \,.\, b - CA \,.\, a = 0$$
$$\text{luego} \Longrightarrow \frac{CB}{CA} = \frac{a}{b}$$

46.- Dado el par $\vec{a}$ - $\vec{a}$. Demostrar que es equivalente a - un par $\vec{b}$, $(-\vec{b})$ situado en un plano paralelo, con el/ mismo momemto.



1) Trazamos el plano paralelo π' los vectores/ $\vec{b}$ y $(-\vec{b})$ obtenidos de - la traslación de $\vec{a}$ y - $(-\vec{a})$ y sus opuestos $\vec{b}_1$ y $(-\vec{b}_1)$. Con esta opera - ción queda el sistema - invariante.

2) Componemos $\vec{a}$ con $(-\vec{b}_1)$ y $(-\vec{a})$ con $\vec{b}_1$ con lo que/ obtenemos dos vectores/ iguales y opuestos, si- tuados en el plano in - termedio entre π y π'; que se nos anulan. El - sistema nos da reducido $\vec{a}$ $\vec{b}$ y $(-\vec{b})$.

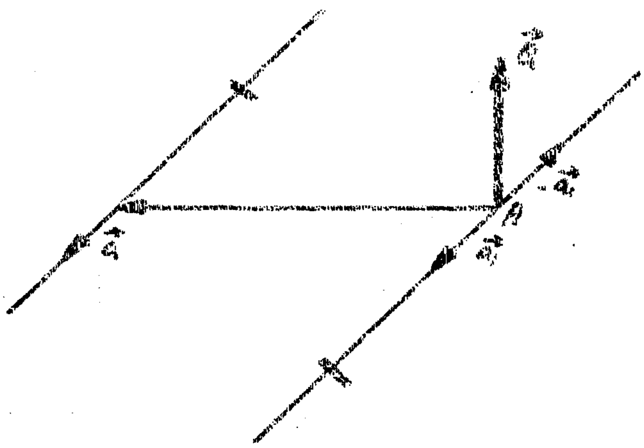
$$(-\vec{a}),\ \vec{a} <> (-\vec{a}), (\vec{a}), \vec{b}, (-\vec{b}), \vec{b}_1, (-\vec{b}_1) <> \vec{b}, (-\vec{b})$$

$\vec{Q} = \vec{d} \wedge \vec{a}$

$\vec{Q} = \vec{d} \wedge \vec{b}$ $\Longrightarrow$ $\vec{a}$ tendrá que tener igual módulo que $\vec{b}$

5.7. <u>Sistema de vectores deslizante cualesquiera.</u>

5.7. Dado el vector deslizante $\vec{a}$, vamos a trasladarlo a - una recta soporte paralela mediante operaciones invariantes: - Consideramos en un punto A de la paralela el vector $\vec{a}_1$ de módu lo y dirección iguales a a y su opuesto $(-\vec{a}_1)$.

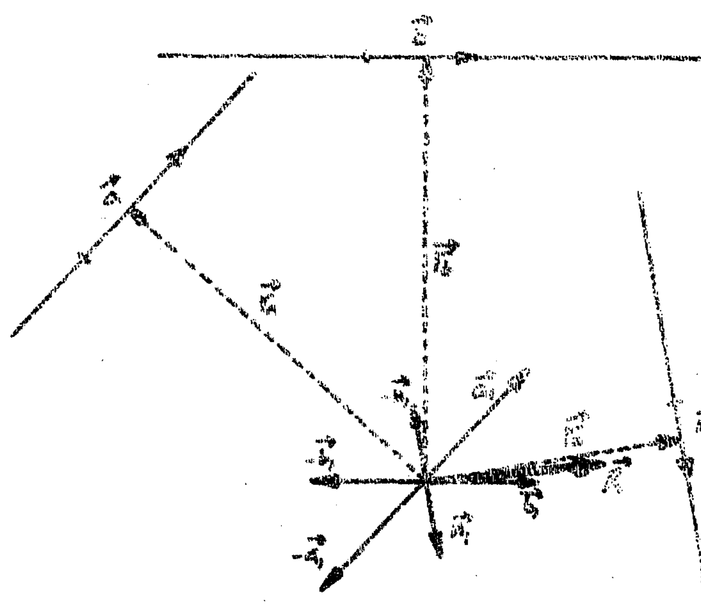


Los vectores $\vec{a}$ y $-\vec{a}_1$ forman un par de vectores deslizantes, representados por el vector libre $\vec{Q}$. Por tanto el vector $\vec{a}$ es equivalente al vector $\vec{a}_1$ y al par $\vec{Q}$.

Caso de que tengamos un sistema de vectores deslizantes ($\vec{a},\vec{b},\vec{c}, \dots \vec{n}$) cualquiera y que lo pretandamos reducir a un punto A del espacio:

Consideraremos el punto A un sistema de vectores $\vec{a}_1$,/ $\vec{b}_1$, $\vec{c}_1$, ... , $-\vec{n}_1$, operaciñon invariante que nos determina un sistema nulo.

$\vec{a}$ y $(-\vec{a}_1)$, $\vec{b}$ y $(-\vec{b}_1)$, $\vec{c}$ $(-\vec{c}_1)$, ..., $\vec{n}$ y $(-\vec{n}_1)$ nos determinan n pares equivalentes a los momentos $\vec{Q}_a$, $\vec{Q}_b$, $\vec{Q}_c$,... $\vec{Q}_n$. Componiendo los restantes vectores concurrentes en A ($\vec{a}_1$, $\vec{b}_1$, ..., $\vec{n}_1$) Se obtiene un vector RESULTANTE GENERAL del sistema.



Igualmente sumando los momentos $\vec{Q}_a$, $\vec{Q}_b$,...,$\vec{Q}_n$ obtenemos el vector libre Q denominado MOMENTO RESULTANTE.

47.- Dado el sistema de vectores deslizantes $\vec{a} = \vec{AB}$, $\vec{b} = \vec{CD}$ y $\vec{c} = \vec{EF}$ dados por los puntos A(1,1,1), B(2,2,0), c(2,0,1), D(2,1,1), E(0,0,1) y F(2,0,2). Determinar/ la resultante general y el momento resultante en el/ origen.

Todo sistema de vectores deslizantes se reduce a una resuoltante general y a un momento resultante

$$\vec{a} = \overrightarrow{AB} = \vec{B}-\vec{A} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$$
$$\vec{b} = \overrightarrow{CD} = \vec{D} - \vec{C} = \vec{i} + \vec{j}$$
$$\vec{c} = \overrightarrow{EF} = \vec{F} - \vec{E} = 2\vec{i} + \vec{k}$$

La resultante general es un vector deslizante, suma/ de los 3 vectores

$$\vec{R} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 4\vec{i} + 2\vec{j}$$

El momento resultante es un vector libre, suma de todos los momentos creados por los n pares de vectores.

$$\vec{Q} = \vec{r} \wedge \vec{a} + \vec{r}_1 \wedge \vec{b} + \vec{r}_2 \wedge \vec{c} = \overrightarrow{OA} \wedge \vec{a} + \overrightarrow{OC} \wedge \vec{b} + \overrightarrow{OE} \wedge \vec{c} =$$

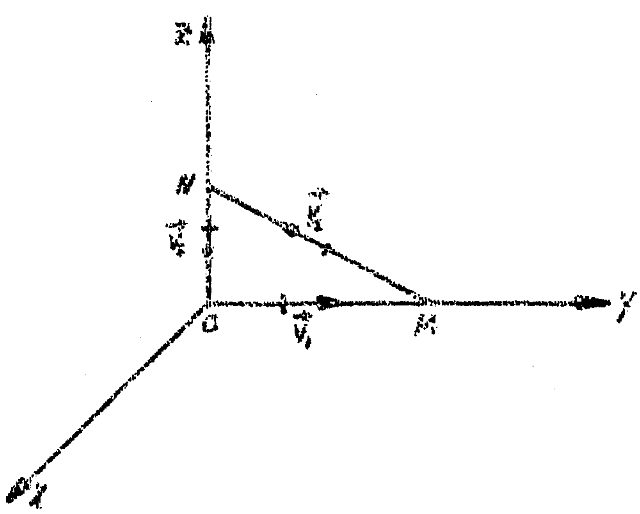
$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2\vec{i} + 5\vec{j}$$

48.- Nos dan la resultante general de un sistema $\vec{R} = 2\vec{j} + 3\vec{k}$ y el momento resultante en el origen $\vec{Q}_0 = 2\vec{i}$ ./ Se pide hallar el sistema de vectores deslizantes -- equivalente, de direcciones conocidas $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{MN}$ y $\overrightarrow{NO}$. - Siendo O(0,0,0) M(0,2,0) y N(0,0,1)

Ecuación de $\overrightarrow{OM}$:

$$\frac{x-0}{0-0} = \frac{y-0}{2-0} = \frac{z-0}{0-0} \Longrightarrow$$

$$\frac{x}{0} = \frac{y}{2} = \frac{z}{0} \Longrightarrow \begin{matrix} z = 0 \\ x = 0 \end{matrix}$$



Esta recta viene definida - como intersección de los -- planos $z = 0$ y $x = 0$

Un vector director según - esta dirección será $\vec{v}_1 = 2\vec{j}$

Ecuación de $\overrightarrow{MN}$:

$$\frac{x-0}{0-0} = \frac{y-2}{0-2} = \frac{z-0}{1-0} \Longrightarrow \frac{x}{0} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z}{1} \Longrightarrow \begin{matrix} x = 0 \\ y-2 = 2z \end{matrix}$$

Vector director $\Longrightarrow$ $\vec{V}_2 = -2\vec{j} + \vec{k}$

Ecuación $\overrightarrow{NO}$:

$$\frac{x+0}{0-0} = \frac{y-0}{0-0} = \frac{z-1}{0-1} \Longrightarrow \frac{x}{0} = \frac{y}{0} = \frac{z-1}{-1} \Longrightarrow \begin{matrix} y = 0 \\ x = 0 \end{matrix}$$

Vector director $\vec{V}_3 = -\vec{k}$

Tenemos que el sistema equivalente estará formado por 3 vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ según direcciones dadas.

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \lambda \vec{v}_1 = 2\lambda \vec{j} \\ \vec{b} &= \mu \vec{v}_2 = -2\mu \vec{j} + \mu \vec{k} \\ \vec{c} &= \rho \vec{v}_3 = -\rho \vec{k} \end{aligned}$$

$$\vec{R} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 2\lambda \vec{j} - 2\mu \vec{j} + \mu \vec{k} - \rho \vec{k} = 2 \vec{j} + 3 \vec{k}$$

Para que se verifique esta igualdad vectorial, tendrá que igualarse las componentes $\Longrightarrow$

$$\left.\begin{aligned} 2\lambda - 2\mu &= 2 \\ \mu - \rho &= 3 \end{aligned}\right\}$$

Sistema de 2 ecuaciones con 3 incognitas necesitamos otra ecuación.

$$\vec{Q}_0 = \overrightarrow{ON} \wedge \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2\mu & \mu \end{vmatrix} = 2\mu \vec{i} = 2\vec{i} \Longrightarrow 2\mu = 2 \Longrightarrow \mu = 1$$

luego $\rho = -3 + 1 = -2$

$$2\lambda - 2 \cdot 1 = 2 \Longrightarrow \lambda = 1 + 1 = 2$$

Con lo que

$$\begin{aligned} \vec{a} &= 4\vec{j} \\ \vec{b} &= -2\vec{j} + \vec{k} \\ \vec{c} &= +2\vec{k} \end{aligned}$$

Comprobación

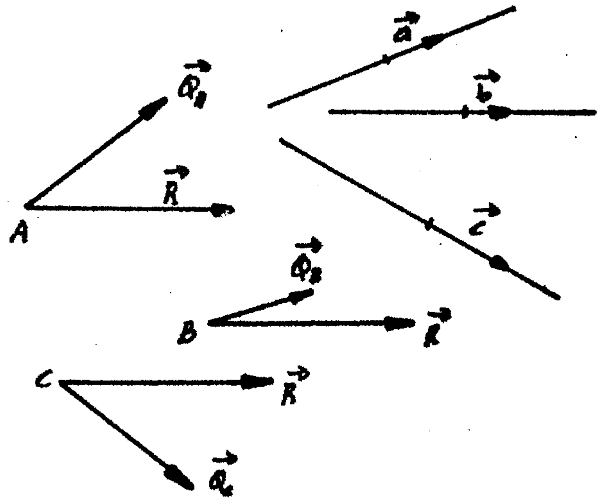
$$\vec{R} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 4\vec{j} - 2\vec{j} + \vec{k} + 2\vec{k} = 2\vec{j} + 3\vec{k}$$

49.- Dados tres puntos fijos A(1,0,0), B(1,1,1) y C(2,3,4) en los que un sistema de vectores deslizantes genera los momentos respectivos.

$\vec{Q}_A$, $\vec{Q}_B$, $\vec{Q}_C$ de valores
$$\vec{Q}_A = 2\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$$
$$\vec{Q}_B = 2\vec{j} + 2\vec{k}$$
$$\vec{Q}_C = -4\vec{i} + 4\vec{j} + 2\vec{k}$$

Hallar la resultante general.

Mediante operaciones invariantes pasamos de un sistema de n vectores deslizantes en el espacio a un momento resultante a una resultante general/ en un punto A del espacio. Luego ambos sistemas son equivalentes.



Igualmentepodriamos haber pasado del sistema de n vectores deslizantes a una resultante general y un momento resultante en B. Luego ambos sistemas son equivalente. Por tanto, la resultante y el momento resultante en A son equivalentes a los que tenemos en B. Esto lo podemos expresar analíticamente mediante el cambio de origen de momentos.

Aplicando el T. cambio origen de momentos

$$\vec{Q}_A = \vec{Q}_B + \vec{AB} \wedge \vec{R} \implies \vec{Q}_A - \vec{Q}_B = \vec{AB} \wedge \vec{R}$$

$$\vec{Q}_A - \vec{Q}_B = 2\vec{i} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 1 \\ R_1 & R_2 & R_3 \end{vmatrix} = \vec{i}(R_3 - R_2) + \vec{j}(R_1) + \vec{K}(-R_1)$$

$$\left.\begin{array}{l} R_3 - R_2 = 2 \\ R_1 = 0 \\ -R_1 = 0 \end{array}\right\} \text{Sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas.}$$

Una ecuación es combinación lineal de la anterior == sistema indeterminado, necesitamos añadir mas ecuaciones. Volvemos a aplicar el Teorema del Cambio de origen de momentos -- nuevamente.

$$\vec{Q}_A = \vec{Q}_C + \vec{AC} \wedge \vec{R} \Longrightarrow \vec{Q}_A - \vec{Q}_C = 6\vec{i} - 2\vec{j} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 3 & 4 \\ R_1 & R_2 & R_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i}(3R_3 - 4R_2) + \vec{j}(4R_1 - R_3) + \vec{k}(R_2 - 3R_1)$$

$$\left.\begin{aligned} 6 &= 3R_3 - 4R_2 \\ -2 &= 4R_1 - R_3 \\ 0 &= R_2 - 3R_1 \end{aligned}\right| \quad \begin{aligned} R_1 &= 0 \\ R_3 &= 2 \end{aligned}$$

como $\vec{R} = R_1\,\vec{i} + R_2\,\vec{j} + R_3\,\vec{k}$

tenemos que $\vec{R} = 2\vec{k}$

50.- Dado un vector deslizante de módulo 5 cuya recta soporte pasa por el punto A(1,0,0) y tiene la direc -- ción del unitario $\vec{u} = (4/5)\vec{i} + (3/5)\vec{j}$; otro vector - deslizante $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j}$ cuya recta soporte pasa por - B(0,1,0) y otro $\vec{c} = -2\vec{j}$, tal que su recta soporte pa se por la intersección de las rectas.

$$\frac{x}{z} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{0} \quad y \quad \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{0}$$

Hallar la resultante general y el momento resultante en P(1,1,1)

$$\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \vec{u} = 5((4/5)\vec{i} + (3/5)\vec{j}) = 4\vec{i} + 3\vec{j}$$
$$\vec{b} = \vec{i} - 2\vec{j}$$
$$\vec{c} = -2\vec{j}$$
$$\vec{R} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 5\vec{i} - \vec{j}$$
$$\vec{Q}_p = \vec{PA} \wedge \vec{a} + \vec{PB} \wedge \vec{b} + \vec{PC} \wedge \vec{c}$$

$$\frac{x}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{0} \qquad z = 0$$

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{0} \qquad \begin{matrix} x = 2y + 2 \\ x-1 = y \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} y = -1 \\ x = 0 \end{matrix} \Longrightarrow C(0,-1,0)$$

$$\vec{PA} = \vec{A} - \vec{P} = -\vec{j} - \vec{k}$$

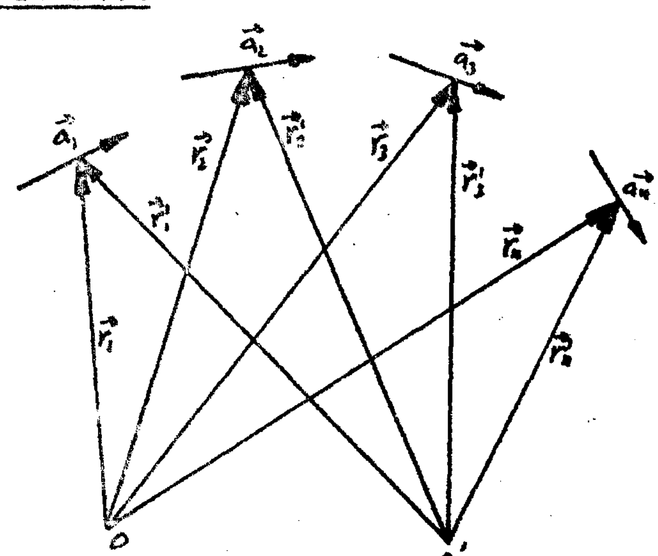
$$\vec{PB} = \vec{B} - \vec{P} = -\vec{i} - \vec{k}$$

$$\vec{PC} = \vec{C} - \vec{P} = -\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}$$

$$\vec{Q}_P = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -1 & -1 \\ 4 & 3 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (3-2-2)\vec{i} + (-4-1)\vec{j} + (4+2+2)\vec{k} = -\vec{i} - 5\vec{j} + 8\vec{k}$$

5,8. Teorema del cambio de origen de momentos en un sistema de n vectores deslizantes.-



Tengamos n vectores $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$

El momento resultante en O vale $\vec{Q}_o = \sum_i \vec{r}_i \wedge \vec{a}_i$

El momento resultante de O' vale $\vec{Q}_{o'} = \sum_i \vec{r}_i{}' \wedge \vec{a}_i$

y tenemos que

$$\vec{r}_i = \vec{OO'} + \vec{r}_i{}'$$

luego

$$\vec{Q}_o = \sum_i \vec{r}_i \wedge \vec{a}_i = \sum_i (\vec{OO'} + \vec{r}_i{}') \wedge \vec{a}_i =$$

$$= \sum_i \vec{OO'} \wedge \vec{a}_i + \sum_i \vec{r}_i{}' \wedge \vec{a}_i = \vec{OO'} \sum \vec{a}_i + \sum \vec{r}_i{}' \wedge \vec{a}_i =$$

$$= \vec{OO'} \wedge \vec{R} + \vec{Q}_{o'}$$

Si $\vec{R} = 0 \Longrightarrow \vec{Q}_o = \vec{Q}_{o'}$

Si $\vec{R} \parallel \vec{OO'} \Longrightarrow \vec{Q}_o = \vec{Q}_{o'}$ Sistemas equivalentes

Si además de lo anterior $\vec{Q}_o = 0 \Longrightarrow$ Sistema nulo

5.9. Eje Central.

Consideremos la fórmula del cambio de origen de momentos $\vec{Q}_o = \vec{Q}_{o'} + \vec{OO'} \wedge \vec{R}$

La vamos a multiplicar escalarmente por $\vec{R}$

$$\Longrightarrow \vec{R} \cdot \vec{Q}_o = \vec{R} \cdot \vec{Q}_{o'} + \vec{R} \cdot \vec{DO} \wedge \vec{R}$$

El producto $\vec{R} \cdot \vec{Q}$ vale lo mismo en cualquier punto y se conoce con el nombre de INVARIANTE ESCALAR DEL SISTEMA

$$\vec{R} \cdot \vec{Q} = R \quad Q \cos\alpha = R\, Q_R = \text{cte.}$$

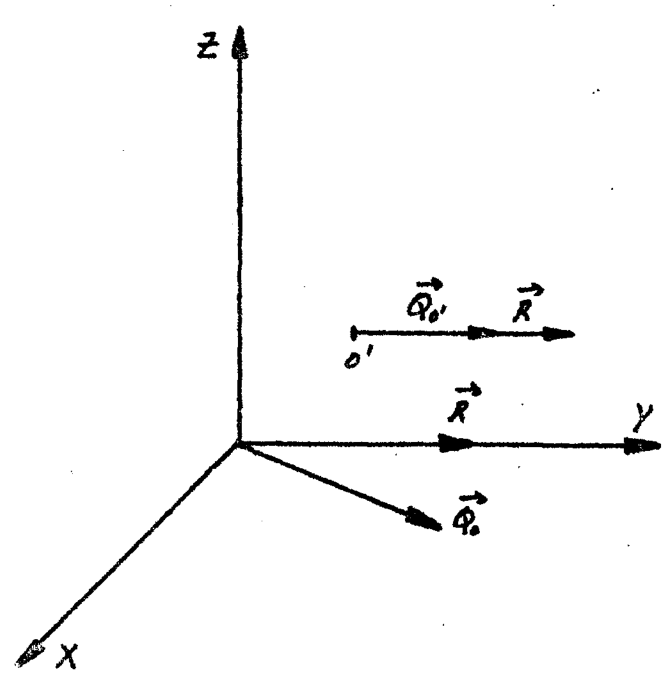
luego la proyección de $\vec{Q}$ sobre $\vec{R}$, Q_R, permanece constante $\vec{Q}_R$ = Constante . Dado que $\vec{R}$ es igual en todos los puntos, también lo será $\vec{Q}_R$

El módulo de Q será mínimo en los centros de reducción donde Q y R coinciden. El lugar geométrico de los puntos/ cumplen esta condición, se llama EJE CENTRAL

Vamos a demostrar que su lugar geométrico es una recta.

Tenemos un sistema de n vectores deslizantes que en/ el origen O (o en un punto cualquiera) se nos reduce a una resultante general y a un momento resultante.

En un punto O'del eje central el sistema se nos reduce a una resultante general y un momento resultante que coincidiran en dirección.



Supongamos que $\vec{R}$ coincide con OY. Aplicamos el Teorema del/ cambio de origen de momentos/ y tenemos

$$\vec{Q}_{o'} = \vec{Q}_o + \vec{O'O} \wedge \vec{R}$$

Expresándolo en función de sus

componentes:

$$Q_{ox'} = Q_{ox} + (yR_3 - zR_2)$$
$$Q_{oy'} = Q_{oy} + (zR_1 - xR_3) \qquad (I)$$
$$Q_{oz'} = Q_{oz} + (xR_2 - yR_1)$$

Pero tenemos que

$$R_i = R_3 = 0 \Longrightarrow R_2 = |\vec{R}|$$
$$Q_{ox'} = Q_{oz'} = 0 \Longrightarrow Q_{oy'} = |\vec{Q}_{o'}|$$

Con lo que (I) se convierte en:

$$0 = Q_{ox} - zR \quad === \quad z = \frac{Q_{ox}}{R} \qquad (II)$$

$Q_{o'} = Q_{oy}$ $\Longrightarrow$ Comprobamos que la proyección de $\vec{Q}$ según la dirección de $\vec{R}$ permanece constante.

$$0 = Q_{oz} + x^R \Longrightarrow x = -\frac{Q_{oz}}{R} \qquad (III)$$

(II) (III) $\Longrightarrow$ $\begin{cases} z = \text{Cte. (ya que para un sistema dado R=Cte} \\ \quad \text{y Q = Cte en un punto)} \\ x = \text{Cte (Igualmente en este caso)} \end{cases}$

Luego el lugar geométrico de los puntos es una recta intersección de los planos $z = a$ $x = b$ que, por tanto, tendrá la dirección/ del eje OY, dirección de la resultante.

Determinación analítica del eje central

Tenemos un sistema de n vectores que en el punto O se nos reduce a una resultante general y a un momento resultante

$$\vec{Q} = L\vec{i} + M\vec{j} + N\vec{k}$$
$$\vec{R} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}$$

En el punto O′ del eje central se tendrá un momento/ $\vec{Q}_{o'}$ según la dirección de $\vec{R}$

Según T. cambio de origen de momentos $\Longrightarrow \vec{Q}_o = \vec{Q}_{o'} + \vec{OO'} \wedge \vec{R}$ y multiplicando vectorialmente por $\vec{R}$ se nos reduce a

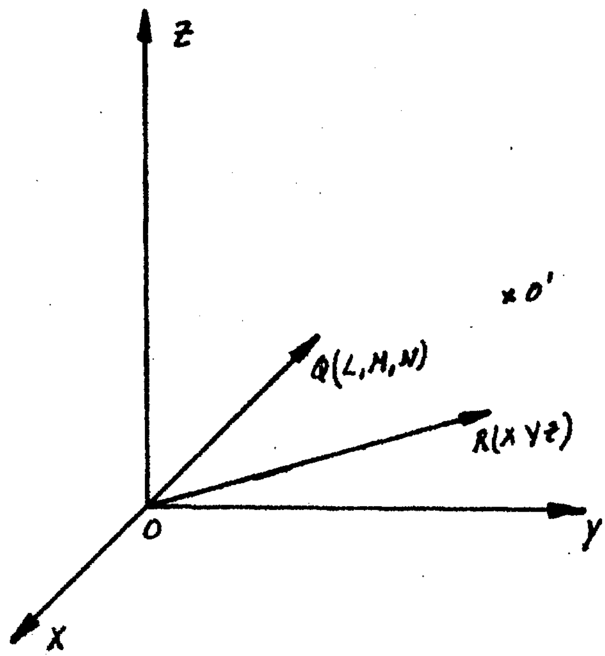
$\vec{R} \wedge \vec{Q}_o = \cancel{\vec{R} \wedge \vec{Q}_{o'}} + \vec{R} \wedge \vec{OO'} \wedge \vec{R}$

El primer sumando del segundo miembro se nos anula porque en el eje central $\vec{R}$ y $\vec{Q}_{o'}$ son vectores paralelos.

Si aplicamos la fórmula de expulsión tenemos

$\Longrightarrow \vec{R} \wedge \vec{Q}_o = R^2\, \vec{OO'} - \vec{R}(\vec{R}.\vec{OO'}) \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \vec{R}.(\vec{R}.\vec{OO'}) = R^2\, \vec{OO'} - \vec{R} \wedge \vec{Q}_o$



Las componentes (o proyecciones) según los ejes de esta expresión serán:

$$X(\vec{R} \,.\, \vec{OO'}) = R^2\, x - (NY - MZ)$$
$$Y(\vec{R} \,.\, \vec{OO'}) = R^2\, y - (LZ - LY)$$
$$Z(\vec{R} \,.\, \vec{OO'}) = R^2\, z - (MX - LY)$$

Despejamos $\dfrac{\vec{R} \,.\, \vec{OO'}}{R^2}$ y tenemos $\Longrightarrow$

$$\Longrightarrow \frac{\vec{R} \,.\, \vec{OO'}}{R^2} = \frac{x - \dfrac{NY - MZ}{R^2}}{X} = \frac{y - \dfrac{LZ - NX}{R^2}}{Y} = \frac{z - \dfrac{MX - LY}{R^2}}{Z}$$

Expresión analítica del eje central

Vamos a suponer que en vez de darnos la resultante general y el momento resultante en el origen, nos los dan en el punto $M(m_1, m_2, m_3)$

Aplicando el Teorema del cambio de origen de momentos tendrémos: $\vec{Q}_M = \vec{Q}_{o'} + \vec{MO'} \wedge \vec{R}$ (II)

Si $\vec{Q}_M = S\vec{i} + T\vec{j} + U\vec{k}$
$\vec{R} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}$

Multiplicando la ecuación (II) vectorialmente por $\vec{R}$

$$\vec{R} \wedge \vec{Q}_M = \vec{R} \wedge \vec{Q}_{o'} + \vec{R} \wedge \vec{MO}' \wedge \vec{R} = \vec{MO}'(\vec{R} \cdot \vec{R}) - \vec{R} \cdot (\vec{R} \cdot \vec{MO}') =$$

$$= R^2 \cdot \vec{MO}' - \vec{R}\,(\vec{R} \cdot \vec{MO}') \Longrightarrow \vec{R} \cdot (\vec{R} \cdot \vec{MO}') = R^2\, \vec{MO}' - \vec{R} \wedge \vec{Q}_M$$

Igualando las componentes de esta igualdad vectorial tenemos:

$$X(\vec{R} \cdot \vec{MO}') = R^2\,(x-m_1) - (UY - TZ)$$
$$Y(\vec{R} \cdot \vec{MO}') = R^2\,(y-m_2) - (SZ - NX)$$
$$Z(\vec{R} \cdot \vec{MO}') = R^2\,(z-m_3) - (TX - SY)$$

Despejando $\dfrac{\vec{R} \cdot \vec{MO}'}{R^2}$, tenemos $\Longrightarrow \dfrac{\vec{R} \cdot \vec{MO}'}{R^2} =$

$$\frac{(x-m_1) - \dfrac{(UY - TZ)}{R^2}}{X} =$$

$$= \frac{(y-m_2) - \dfrac{(SZ - NX)}{R^2}}{Y} = \frac{(z-m_3) - \dfrac{(TX - SY)}{R^2}}{Z}$$

Expresión analítica del eje central

PROBLEMAS

51.- Dado un sistema de vectores deslizantes cualesquiera sabemos que se reduce en el origen a una resultante/ general $\vec{R} = 2\vec{i} + \vec{j}$ y a un momento $\vec{Q} = 2\vec{k}$. Se pide - hallar el momento mínimo.

Sabemos que $\vec{Q}_o \cdot \vec{R} = \vec{Q}_{min} \cdot \vec{R} =$ Constante $\Longrightarrow$ Invariante escalar. Sabemos que el momento es mínimo en el eje central (ya quedefinimos eje central como lugar geométrico de los puntos donde el momento es mínimo), cosa que ocurre cuando tiene la dirección de la resultante ($\cos \alpha = \cos 0^{o} = 1$)

$$\vec{Q}_o \cdot \vec{R} = |\vec{Q}_{min}| \; R \; \cos 0^{\circ} = \vec{Q}_{min} \cdot \vec{R} \implies$$

$$\implies Q_{min} = \frac{\vec{Q}_o \cdot \vec{R}}{R} = 0$$

Esto podría expresarse vectorialmente de la forma

$$\vec{Q}_{mín} = |\vec{Q}_{mín}| \cdot \vec{u} \; |\vec{Q}_{mín}| \cdot \frac{\vec{R}}{|\vec{R}|} = \frac{(\vec{Q}_o \cdot \vec{R})}{R^2} \vec{R}$$

Donde $\vec{u}$ es el unitario según la dirección de $\vec{Q}_{mín}$ por tanto -- según la de R (vector conocido)

52.- Un sistema de vectores deslizantes $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ se reducen en el origen a una resultante general $\vec{R} = 4\vec{i} + 2\vec{j}$ y a un momento resultante $\vec{Q}_o = -2\vec{i} + 5\vec{j}$. Determinar/ la ecuación del eje central

$$R \begin{cases} X = 4 \\ Y = 2 \\ Z = 0 \end{cases} \quad \vec{Q} \begin{cases} L = -2 \\ M = 5 \\ N = 0 \end{cases} \qquad R^2 = 4^2 + 2^2 = 20$$

$$\frac{x - \dfrac{0 \cdot 2 - 5.0}{20}}{4} = \frac{y - \dfrac{(-2).0-0.4}{20}}{2} = \frac{z - \dfrac{4.5 - (-2).2}{20}}{0}$$

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-(6/5)}{0}$$

EJE CENTRAL
(ECUACION DE UNA RECTA)

Intersección de las planos

$$x = 2y$$
$$z = 6/5$$

53.- Dado el sistema de vectores deslizantes $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j}$ y $\vec{b} = -4\vec{i} - 2\vec{j}$, cuyas rectas soportes pasan respectivamente por los puntos A(1,0,0) y B(2,1,0). Hallar las ecuaciones del eje central.

- Un sistema de n vectores deslizantes se reducé en un punto cualquiera del espacio a una resultante genral y a un momento resultante

$$\vec{R} = \vec{a} + \vec{b} = -2\vec{i} - \vec{j}$$

El momento lo hallaremos en un punto cualquiera, por ejemplo en el origen

$$\vec{Q}_o = \vec{OA} \wedge \vec{a} + \vec{OB} \wedge \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \vec{K}$$

Apliquemos la expresión analítica del eje central

$$\frac{x - \frac{(NY - MZ)}{R}}{X} = \frac{y - \frac{(LZ - NX)}{R}}{Y} = \frac{z - \frac{(MX - LY)}{R}}{Z}$$

$$X = 2 \qquad L = 0$$
$$Y = -1 \qquad M = 0 \qquad R^2 = (-2)^2 + 1^2 = 5$$
$$Z = 0 \qquad N = 1$$

$$\frac{x - \frac{1.(-1)-0.0}{5}}{-2} = \frac{y - \frac{0.0-1(2)}{5}}{-1} = \frac{z - \frac{0(-2)-0(1)}{5}}{0}$$

Simplificando $\Longrightarrow$ $\dfrac{x + 1/5}{-2} = \dfrac{y - 2/5}{1} = \dfrac{z}{0}$ Ecuación del eje central

<u>Eje central en un sistema de vectores deslizantes paralelos.</u>

- Si la dirección de los n vectores $\vec{E}_i$ viene determinada por el unitario $\vec{u}$

$\vec{u} = u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k}$

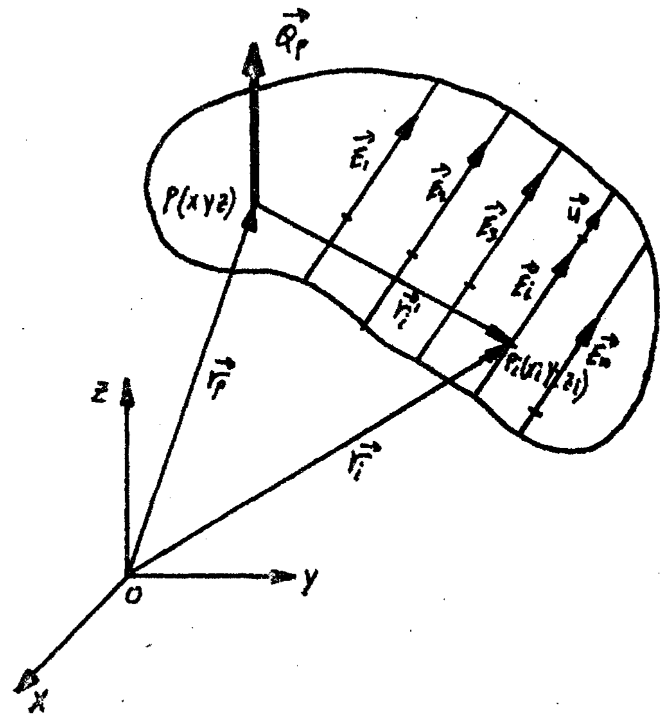
El módulo de $\vec{E}_i$ por $\vec{u}$ nos determina el valor de $\vec{E}_i$

$\vec{E}_i = |\vec{E}_i| \cdot \vec{u}$

- Un sistema de n vectores deslizantes se reduce, en un punto P cualquiera, a una resultante general y a un momento resultante.

  a) El momento resultante $\Longrightarrow \vec{Q}_p = \sum \vec{r}\,'_i \wedge \vec{E}_i$, luego $\vec{Q}_p$ será perpendicular a $\vec{r}\,'_i$ y a $\vec{E}_i$ por tanto a $\vec{u}$

  b) La resultante general $\vec{R} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots + \vec{E}_n$ luego $\vec{R} = E_1\vec{u} + E_2\vec{u} + \dots + E_n\vec{u} = \vec{u} \sum \vec{E}_i$



  c) Luego $\vec{Q}$ y $\vec{R}$ son perpendiculares.

- El producto escalar de dos vectores perpendiculares vale 0 -

$\vec{Q} \cdot \vec{R} = 0$ luego, el invariante escalar es nulo

- En el eje central $\vec{Q}$ y $\vec{R}$ coinciden

$$\vec{Q}_p \cdot \vec{R} = \vec{Q} \cdot \vec{R} = 0 \Longrightarrow Q\ R \cos 0 = 0 \Longleftrightarrow \vec{Q} \cdot \vec{R} = 0$$

$$\text{como } |\vec{R}| \neq 0 \Longrightarrow |\vec{Q}| = 0$$

$$\vec{Q}_p = \sum(\vec{r}\,'_i \wedge \vec{E}_i) = \sum(\vec{r}_i - \vec{r}_p) \wedge \vec{E}_i = \sum \vec{r}_i \wedge \vec{E}_i - \vec{r}_p \wedge \sum \vec{E}_i$$

- El momento resultante en el eje central es 0, si P está en el eje central

$$\vec{Q}_p = 0 = \sum(\vec{r}_i \wedge \vec{E}_i) - \vec{r}_p \wedge (\vec{E}_i) \Longrightarrow \sum \vec{r}_i \wedge \vec{E}_i = \vec{r}_p \wedge \sum \vec{E}_i$$

$$\sum \vec{r}_i \wedge \vec{E}_i = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_i & y_i & z_i \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix} \sum |\vec{E}_i| = \sum |\vec{E}_i| \cdot \Big[\vec{i}(y\ \ u_3 - z\ \ u_2) +$$
$$+ \vec{j}\,(z\ \ u_1 - x\ \ u_3) + \vec{k}\,(x\ \ u_2 - y\ \ u_1) \Big]$$

$$\vec{r}_p \wedge \sum \vec{E}_i = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix} \sum E_i = \sum E_i \cdot \Big[\vec{i}(yu_3 - zu_2) + \vec{j}(zu_1 - xu_3) + \vec{k}\,(xu_2 - yu_1) \Big]$$

Identificando componentes

$$\sum (y_i \,.\, E_i)\ u_3 - \sum (z_i \,.\, E_i)\ u_2 = u_3\ y \sum E_i - u_2\ z \sum E_i$$
$$(z_i \,.\, E_i)\ u_1 - \sum (x_i \,.\, E_i)\ u_3 = u_1\ z \sum E_i - u_3\ x \sum E_i$$
$$(x_i \,.\, E_i)\ u_2 - \sum (y_i \,.\, E_i)\ u_1 = u_2\ x \sum E_i - u_1\ y \sum E_i$$

Y agrupando según los unitarios tenemos:

$$u_3 \Big[\sum (y_i \,.\, E_i) - y \,.\sum E_i = u_2 \Big[\sum (z_i\ \ E_i) - z \cdot \sum (E_i)$$
$$u_1 \Big[\sum (z_i \,.\, E_i) - z \,.\sum E_i = u_3 \Big[\sum (x_i\ \ E_i) - x \cdot \sum E_i$$
$$u_2 \Big[\sum (x_i \,.\, E_i) - x \,.\sum E_i = u_1 \Big[\sum (y_i\ \ E_i) - y \,.\sum E_i$$

De donde obtenemos

$$\frac{x - \dfrac{\sum x_i\ E_i}{\sum E_i}}{u_1} = \frac{y - \dfrac{\sum y_i\ E_i}{\sum E_i}}{u_2} = \frac{z - \dfrac{\sum z_i\ E_i}{\sum E_i}}{u_3}$$ Ecuación del eje central

INDICE: Página